解析学 2 演習 10　　　　　　　担当　木上

演習 10.1. (1)　A を n 次の直交行列とする。このとき、任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\mathcal{F}(f \circ A) = \mathcal{F}(f) \circ A$$

を示せ。
(2)　$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が radial であるとはある $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ があって任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(x) = h(|x|)$ が成り立つことである。$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ が radial ならば $\mathcal{F}f$ も radial であることを示せ。

演習 10.2. $\lambda > 0$ とし、$f(x) = (\lambda + x^2)^{-1}$ とおく。$(\mathcal{F}f)(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|x|}$ を示せ。

演習 10.3. 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $(\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F})f = f$ を示せ。

演習 10.4. $P(x)$ を複素係数の 1 変数多項式とする。$P(x) = 0$ が実数解をもたないとき、$1/P(x) \in C^\infty_{PG}(\mathbb{R})$ を示せ。

演習 10.5. (1)　$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と $\lambda > 0$ に対して、

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + \lambda u = f$$

をみたす $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ がただ一つ存在し、ある $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x-y) f(y)dy$$

と表されることを示せ。
(2)　(1) の g_λ を用いて、$G_\lambda : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $G_\lambda f = g_\lambda * f$ で定義する。この G_λ は任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $L^p(\mathbb{R})$ からそれ自身への有界線型作用素に拡張でき、

$$||G_\lambda f||_p \le \frac{1}{\lambda} ||f||_p$$

が成り立つことを示せ。