解析学 II 演習 10 解答

解答 10.1.

(1)　A は直交行列なので

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f\circ A)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(Ay)e^{-ix\cdot y}dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-ix\cdot A^* z}\frac{1}{|\mathrm{det}A|}dz \qquad (z=Ay) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-iAx\cdot z}dz = (\mathcal{F}f)(Ax)
\end{aligned}$$

(2)　仮定より任意の直交行列 A に対して $f\circ A(x) = h(|Ax|) = h(|x|) = f(x)$．(1) より

$$\mathcal{F}f = \mathcal{F}(f\circ A) = (\mathcal{F}f)\circ A.$$

これが任意の直交行列 A に対して成り立つので，$\mathcal{F}f$ も radial である．

解答 10.2.　$g_w(z) = \dfrac{1}{z^2+\lambda}e^{-iwz} = \dfrac{1}{(z+\sqrt{\lambda}i)(z-\sqrt{\lambda}i)}e^{-iwz}$ の留数を求める。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(g_w;\sqrt{\lambda}i) &= \lim_{z\to\sqrt{\lambda}i}\frac{1}{z+\sqrt{\lambda}i}e^{-iwz} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}i}e^{\sqrt{\lambda}w}, \\
\mathrm{Res}(g_w;-\sqrt{\lambda}i) &= \lim_{z\to-\sqrt{\lambda}i}\frac{1}{z-\sqrt{\lambda}i}e^{-iwz} = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda}i}e^{-\sqrt{\lambda}w}.
\end{aligned}$$

反時計回りに向き付けられた 2 つの半円を $C_R = \{-R\le z\le R\}\cup\{Re^{i\theta}\mid 0\le\theta\le\pi\}$, $D_R = \{-R\le z\le R\}\cup\{-Re^{i\theta}\mid 0\le\theta\le\pi\}$ $(R>\sqrt{\lambda})$ とおく。留数定理から,

$$\begin{aligned}
\oint_{C_R} g_w(z)dz &= 2\pi i\mathrm{Res}(g_w;\sqrt{\lambda}i) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}e^{\sqrt{\lambda}w}, \\
\oint_{D_R} g_w(z)dz &= 2\pi i\mathrm{Res}(g_w;-\sqrt{\lambda}i) = -\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}w}
\end{aligned}$$

が成り立つ。まず，$w<0$ の場合を考察する。

$$\oint_{C_R} g_w(z)dz = \int_{-R}^{R} g_w(x)dx + \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{-iwRe^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta$$

であり，$0<\theta<\pi$ のとき,

$$\begin{aligned}
\left|f(Re^{i\theta})e^{-iwRe^{i\theta}}Rie^{i\theta}\right| &= \left|f(Re^{i\theta})e^{-iwR(\cos\theta+i\sin\theta)}Rie^{i\theta}\right| \\
&\le R|f(Re^{i\theta})|e^{wR\sin\theta} \le \frac{R}{(R^2-\lambda)^2}e^{wR\sin\theta} \to 0, \quad (R\to\infty).
\end{aligned}$$

ここで，

$$|f(Re^{i\theta})| = \left|\frac{1}{(Re^{i\theta})^2+\lambda}\right| = \frac{1}{\sqrt{R^4+2R^2\lambda\cos 2\theta+\lambda^2}} \leq \frac{1}{(R^2-\lambda)^2}$$

を用いた。そして，$\sqrt{\lambda}$ より大きい定数 C_1 以上の R において，

$$R|f(Re^{i\theta})|e^{wR\sin\theta} \leq \frac{R}{(R^2-\lambda)^2}e^{wR\sin\theta} \leq C_2$$

なる定数 $C_2 > 0$ で押さえられるので，Lebesugue 収束定理より，

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{-iwRe^{i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta\right| = 0.$$

ゆえに，$w < 0$ のとき，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} g_w(x)dx = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}e^{\sqrt{\lambda}w} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}|w|}$$

一方，同様の議論を $w > 0$ に対して $\oint_{D_R} g_w(z)dz$ の場合に行うことで，$w > 0$ のとき，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} g_w(x)dx = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}w} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}|w|}$$

が示される。以上から，$(\mathcal{F}f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+\lambda}dx = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ とあわせると，

$$(\mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}|x|} = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}e^{-\sqrt{\lambda}|x|}.$$

解答 10.3.　$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (\mathcal{F}f)(-x)$ が成り立つ．また $g(x) := f(-x)$ とおけば $(\mathcal{F}g)(x) = (\mathcal{F}f)(-x)$ である．従って $(\mathcal{F}\circ\mathcal{F})f(-x) = f(x)$ となるが，これを再度用いることで $(\mathcal{F}\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{F})f = f$ がえられる．

解答 10.4.　$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と実根を持たない多項式 P に対して $f\cdot P^{-1} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ であり、非負整数 n に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot P^{-1}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\frac{d^k}{dx^k}P^{-1}$$

となる。数学的帰納法により P^{-1} の k 階導関数はある多項式 Q_k を用いて $Q_k\cdot P^{-k-1}$ と書ける（多項式 P の次数を d とすると多項式 Q_k の次数は高々$k(d-1)$ である）。よって任意の非負整数 m, n に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot P^{-1})(x)\right| < +\infty$$

が成り立ち、$f\cdot P^{-1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ がわかる。

解答 10.5.

(1) $h_\lambda(y) := (2\pi)^{-1/2}(y^2+2iy+\lambda)^{-1}$ とおくと，$h_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$.

$x \geq 0$ のときは

$$C_{R,+} := \{y \in \mathbb{C} | -R \leq \mathrm{Re}(y) \leq R, \mathrm{Im}(y) = 0\} \cup \{y \in \mathbb{C} |\, |y| = R, \mathrm{Im}(y) \geq 0\},$$

$x \leq 0$ のときは

$$C_{R,-} := \{y \in \mathbb{C} | -R \leq \mathrm{Re}(y) \leq R, \mathrm{Im}(y) = 0\} \cup \{y \in \mathbb{C} |\, |y| = R, \mathrm{Im}(y) \leq 0\}$$

という積分路を考えて，留数定理を用いることにより

$$\mathcal{F}^{-1}h_\lambda(x) = (2\sqrt{1+\lambda})^{-1}e^{-\sqrt{1+\lambda}|x|-x} \tag{1}$$

がわかる．これより，$\mathcal{F}^{-1}h_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ がわかる．

$g_\lambda := \mathcal{F}^{-1}h_\lambda$ とおく．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とするとき，$\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$．したがって，演習 10.4. により $(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g_\lambda) = (\mathcal{F}f)h_\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ がわかる．

一方，$\sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g_\lambda) = \mathcal{F}(f * g_\lambda)$ なので $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f * g_\lambda) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であり，また，$f * g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ なので $f * g_\lambda = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f * g_\lambda)$ であるから，これらより $f * g_\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ がわかる．

$u = f * g_\lambda$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(-\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + \lambda u\right)(y) &= (y^2+2iy+\lambda)(\mathcal{F}u)(y) \\
&= (y^2+2iy+\lambda)(\mathcal{F}(f * g_\lambda))(y) \\
&= (y^2+2iy+\lambda)\sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)(y)(\mathcal{F}g_\lambda)(y) \\
&= (\mathcal{F}f)(y)
\end{aligned}$$

であり，両辺ともに $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の元なので，両辺を逆 Fourier 変換することにより，この u が方程式

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx} + \lambda u = f \tag{2}$$

をみたすことがわかる．

$u_1, u_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ がともに方程式 (2) をみたすとする．このとき，$v := u_1 - u_2$ は方程式

$$-\frac{d^2v}{dx^2} - 2\frac{dv}{dx} + \lambda v = 0$$

をみたす．この式の両辺を Fourier 変換することにより $\mathcal{F}v = 0$ がわかり，ふたたび逆 Fourier 変換することにより，$v = 0$ がわかる．したがって，方程式 (2) の解は一意的であることがわかった．

(2) 定理 6.1.1. により

$$\begin{aligned}
\|G_\lambda f\|_p &\leq \|g_\lambda * f\|_p \\
&\leq \|g_\lambda\|_1 \|f\|_p
\end{aligned}$$

であり，g_λ の具体的な表現 (式 (1) 参照) を用いて計算することにより

$$\|g_\lambda\|_1 = \lambda^{-1}$$

となるので，任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$\|G_\lambda f\|_p \leq \lambda^{-1}\|f\|_p \tag{3}$$

がわかる．

G_λ が $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上で線型になることは定義より明らか.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $L^p(\mathbb{R})$ で稠密なので，$f \in L^p(\mathbb{R})$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_p = 0$ となる $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ が存在する．このとき，(3) と G_λ の線形性により

$$\|G_\lambda f_n - G_\lambda f_m\|_p \leq \|G_\lambda(f_n - f_m)\|_p \leq \lambda^{-1}\|f_n - f_m\|_p$$

したがって，$\{G_\lambda f_n\}$ は $L^p(\mathbb{R})$ での Cauchy 列になっている．$L^p(\mathbb{R})$ が完備なので，$\lim_{n\to\infty}\|G_\lambda f_n \varphi\|_n = 0$ となる $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ が存在する．この φ が Cauchy 列のとり方によらないことをみるのはやさしい．したがって，G_λ は $L^p(\mathbb{R})$ 上の有界線型作用素に拡張できる．