解析学 2 演習 11　　　　　　　　担当　木上

演習 11.1. $\varphi(x) = e^{-x^2}$ とし、$\varphi_n(x)$ を φ の n 階導関数とする。さらに $\psi_n(x) = e^{x^2/2}\varphi_n(x)$ とおく。
(1) $n \geq 0$ で

$$\psi_{n+1}(x) = (\psi_n)'(x) - x\psi_n(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし $(\psi_n)'$ は ψ_n の導関数である。
(2) ψ_n の Fourier 変換を f_n とおくとき、$n \geq 0$ で

$$f_{n+1}(x) = ixf_n(x) - i(f_n)'(x)$$

が成り立つことを示せ。
(3) $n \geq 0$ で $f_n(x) = (-i)^n\psi_n(x)$ を示せ。

演習 11.2. $R > 0$ とし、$S_R = \{z | z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Im}\, z| < R\}$ とおく。いま $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して $f_R(x) = f(x)e^{R|x|}$ とおくと $f_R \in L^1(\mathbb{R})$ が成り立つとする。
(1) $z \in S_R$ に対して $f(y)e^{-izy}$ は y に関して $\mathbb{R}$ 上可積分であることを示せ。さらに $z \in S_R$ に対して

$$\widehat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-izy}dy$$

とおくとき、$\widehat{f}$ は S_R 上連続であることを示せ。
(2) $a < b$ に対して $\gamma : [a, b] \to S_R$ は連続な閉曲線で区分的に滑らかであるとする。すなわちある $a = x_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ に対して任意の $j = 0, 1, \ldots, n-1$ で $\gamma|_{[}a_j, a_{j+1}]$ は $[a_j, a_{j+1}]$ 上では C^1 級であるとする。このとき、Fubini の定理を用いて、$\int_\gamma \widehat{f}(z)dz = 0$ を示せ。
(3) $\widehat{f}$ は S_R 上正則であることを示せ。

演習 11.3. f は $\mathbb{R}$ 上定義された実数値関数で $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする。
(1)

$$\int_{\mathbb{R}} xf'(x)f(x)dx = -\frac{1}{2}||f||_2^2$$

を示せ。
(2) f の Fourier 変換を $\widehat{f}$ とおくとき、

$$\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx \int_{\mathbb{R}} x^2|\widehat{f}(x)|^2dx \geq \frac{1}{4}||f||_2^4$$

が成り立つことを示せ。
[ヒント：(2) $x\widehat{f}(x)$ の逆 Fourier 変換は？ 一般に $(g, g)_2 = (\mathcal{F}g, \mathcal{F}g)_2$.]