解析学 II 演習 11 解答

解答 11.1. まず $\psi_n(x) = e^{-x^2/2}\phi_n(x)$ ではなく, $\psi_n(x) = e^{x^2/2}\phi_n(x)$ と変更する.
(1) $\psi_n(x) = e^{x^2/2}\phi_n(x)$ の両辺を微分をすれば次を得ることよりよい.

$$\psi_n'(x) = x\psi_n(x) + \psi_{n+1}(x).$$

(2) 函数 f の Fourier 変換 $\mathcal{F}(f)$ の性質

$$\mathcal{F}(f')(x) = ix\mathcal{F}(f)(x),\ \mathcal{F}(xf)(x) = i\left(\mathcal{F}(f)\right)'(x)$$

を用いて (1) で示した ψ_n の関係式を Fourier 変換したものを整理すれば得られる.
(3) まず $n=0$ のときは $e^{-x^2/2}$ の Fourier 変換が $e^{-x^2/2}$ であったことよりよい.
次に $f_n(x) = (-i)^n\psi_n(x)$ を仮定する. これを (2) で示した f_n の関係式の右辺に代入すると $f_{n+1}(x) = (-i)^{n+1}\psi_{n+1}(x)$ を得る.

解答 11.2.
(1) $z \in S_R$ とすると

$$|f(y)e^{-izy}| \leq |f(y)|e^{R|y|}$$

となるので仮定より $f(y)e^{-izy}$ は y に関して $\mathbb{R}$ 上可積分.
さらに $z, w \in S_R$ に対して

$$|\widehat{f}(z) - \widehat{f}(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)||e^{-izy} - e^{-iwy}|dy$$

であり

$$\lim_{w\to z} |f(y)||e^{-izy} - e^{-iwy}| = 0,\ |f(y)||e^{-izy} - e^{-iwy}| \leq 2|f(y)|e^{R|y|}$$

となるので Lebesgue の収束定理を用いれば $\widehat{f}$ の S_R 上の連続性が従う.
(2) Fubini の定理を用いると

$$\int_\gamma \widehat{f}(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_\gamma e^{-izy}dz\right)dy = 0.$$

(3) Morera の定理を用いればよい.

解答 11.3.
(1) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に注意して部分積分を用いれば

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} xf'(x)f(x)dx &= [f(x)\,(xf(x))]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\,(f(x) + xf'(x))\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2dx - \int_{\mathbb{R}} xf'(x)f(x)dx.\end{aligned}$$

これを整理すれば主張が得られる.

(2) まず (1) の関係式とシュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|f\|_2^4 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)||f'(x)|\right)^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2dx.\end{aligned}$$

ここで次が成り立つことに注意すると主張を得る.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2dx &= (f', f')_2 \\ &= (\mathcal{F}(f'), \mathcal{F}(f'))_2 \\ &= (ix\widehat{f}, ix\widehat{f})_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2|\widehat{f}(x)|dx.\end{aligned}$$

ただし $(\cdot,\cdot)_2$ は $L^2(\mathbb{R})$ での内積である.