解析学 2 演習 12　　　　　　担当　木上

演習 12.1. 可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ および $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して $\phi_f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx$ とおく。
(1)　a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ で $f(x) \geq 0$ であり任意の $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して fu が $\mathbb{R}^n$ 上可積分であり $\phi_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする。可測関数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が a. e. $x \in \mathbb{R}^n$ で $|g(x)| \leq |f(x)|$ をみたすなら、$\phi_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を示せ。
(2)　P を n 変数の複素係数多項式とする。$\phi_P \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を示せ。

演習 12.2. (1)　$a > 0$ とする。$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して、

$$F_a(u) = \int_{-\infty}^{-a} \frac{u(x)}{x}dx + \int_{a}^{+\infty} \frac{u(x)}{x}dx + \int_{-a}^{a} \frac{u(x)-u(0)}{x}dx$$

とおくと $F \in \mathcal{S}'$ であることを示せ。
(2)　(1) で定義した F_a は a によらないことを示せ。さらに任意の $u \in \mathcal{S}$ に対して、次の式が成立することを示せ。

$$F_a(u) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{u(x)}{x}dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{u(x)}{x}dx \Big)$$

演習 12.3. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ とする。f の超関数の意味での微分が 0 のとき f は定数関数に等しいことを示せ。

演習 12.4. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ とする。いま $xf = 0$ ならば f は δ_0 の定数倍であることを示せ。

演習 12.5. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$ とする。
(1) f の超関数の意味での k-階微分が 0 ならば f は $k-1$ 次以下の多項式であることを示せ。
(2) $x^k f = 0$ ならばある定数 $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ に対して $f = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \delta_0^{(j)}$ と書けることを示せ。ただし $\delta_0^{(j)}$ は δ_0 の超関数の意味の j-階微分である。