解析学 II 演習 12 解答

解答 12.1.

(1)　講義ノート定理 7.1.3.(126 頁から 127 頁) より $f \in L^1_{PG}$, つまりある $N \in \mathbb{N}_*$, $c > 0$ が存在し

$$\int_{B_r(0)} |f(x)|dx \leq c(1 + r^N).$$

これより $|g(x)| \leq |f(x)|$ に注意すれば

$$\int_{B_r(0)} |g(x)|dx \leq c(1 + r^N).$$

従って $g \in L^1_{PG}$ なので $\phi_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(2)　$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{C}$-線型空間であるので $\phi_{x^\alpha} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を証明すれば十分である. これは任意の $r > 0$ に対して

$$\int_{B_r(0)} |x^\alpha|dx \leq 2^n(1 + r^{|\alpha|+n})$$

であるので講義ノート定理 7.1.3. よりよい.

解答 12.2.

(1)　$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $a > 0$ とする.

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{-a} \frac{u(x)}{x}dx + \int_a^{+\infty} \frac{u(x)}{x}dx\right| &\leq \int_{-\infty}^{-a} \left|\frac{xu(x)}{x^2}\right| dx + \int_a^{+\infty} \left|\frac{xu(x)}{x^2}\right| dx \\ &\leq \frac{2}{a}|u|_1.\end{aligned}$$

平均値の定理より

$$\begin{aligned}\left|\int_{-a}^{a} \frac{u(x) - u(0)}{x}dx\right| &\leq \int_{-a}^{a} dx \sup_{x \in \mathbb{R}} |u'(x)| \\ &\leq 2a|u|_1.\end{aligned} \tag{$*$}$$

これらより $F_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ である.

(2)　まず $0 < a < b$ に対して

$$\begin{aligned}F_a(u) - F_b(u) &= \int_{-b}^{-a} \frac{u(x)}{x}dx + \int_a^b \frac{u(x)}{x}dx - \int_{-b}^{-a} \frac{u(x) - u(0)}{x}dx - \int_a^b \frac{u(x) - u(0)}{x}dx \\ &= 0\end{aligned}$$

よって F_a は $a > 0$ によらない. またこのことより $F_a(u) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_\varepsilon(u)$. ここで $(*)$ より

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{u(x) - u(0)}{x}dx = 0$$

となることよりよい.

解答 12.3.

$$\widetilde{u}(x) = \int_{-\infty}^{x} u(t)dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt\right) e^{-x^2}$$

とすると $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の定義より $\widetilde{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であり

$$u = \frac{d\widetilde{u}}{dx} - 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt\right) xe^{-x^2}.$$

これより

$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(\frac{d\widetilde{u}}{dx}\right) - 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt\right) f(xe^{-x^2}) \\ &= \phi_{-2f(xe^{-x^2})}(u) \end{aligned}$$

となるので f が定数函数ということが示された.

解答 12.4.

$$\widetilde{u}(x) = u(x) - u(0)e^{-x^2}$$

とすると $\widetilde{u}(0) = 0$ であるので

$$\widetilde{u}(x) = x\int_0^1 \widetilde{u}'(xt)dt$$

となり, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の定義より $\int_0^1 \widetilde{u}'(xt)dt \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. これより

$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(x\int_0^1 \widetilde{u}'(xt)dt\right) + u(0)f(e^{-x^2}) \\ &= f(e^{-x^2})\delta_0(u) \end{aligned}$$

となるので f が δ_0 の定数倍ということが示された.

解答 12.5.

(1)　まず $f^{(k)} = 0$ から演習 12.3. よりある $c_0 \in \mathbb{C}$ が存在して $f^{(k-1)} = c_0$. これより $(f^{(k-2)} - c_0x)' = 0$ となり, 再び演習 12.3. よりある $c_1 \in \mathbb{C}$ が存在して $f^{(k-2)} - c_0x = c_1$. これを繰り返せば結論を得る.

(2)　まず $x^k f = 0$ から演習 12.4. よりある $c_0 \in \mathbb{C}$ が存在して $x^{k-1}f = c_0\delta_0$. これより $x\delta_0^{(j)} = -\delta_0^{(j-1)}$ に注意すると $x(x^{k-2}f + c_0\delta_0^{(1)}) = 0$ となり, 再び演習 12.4. よりある $c_1 \in \mathbb{C}$ が存在して $x^{k-2}f + c_0\delta_0^{(1)} = c_1\delta_0$. これを繰り返せば結論を得る.