# 解析学 II 演習 1 解答

**解答 1.1.**

**(1)** $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ とすると $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[0,1)}(x)$ であって $n \geq 2,\ 0 \leq x < \infty$ に対して

$$|f_n(x)| \leq \min\{1, x^{-2}\}$$

である. ここで $\min\{1, x^{-2}\}$ は $[0,\infty)$ 上可積分であるので Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^\infty \chi_{[0,1)}(x)dx = 1.$$

**(2)** $f_n(x) = \frac{\sin e^x}{1+nx^2}$ とすると $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ であって $n \geq 1,\ 0 \leq x < \infty$ に対して

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

である. ここで $\frac{1}{1+x^2}$ は $[0,\infty)$ 上可積分であるので Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

**(3)** $f_n(x) = \frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}$ とすると $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ であって相加相乗平均より $n \geq 1,\ 0 \leq x \leq 1$ に対して

$$|f_n(x)| \leq \left|\frac{\cos x}{2x^{3/4}}\right| \leq \frac{1}{2x^{3/4}}$$

である. ここで $\frac{1}{2x^{3/4}}$ は $[0,1]$ 上可積分であるので Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

**解答 1.2.** 単調収束定理により

$$\int_X \sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n(x)|\,dx < \infty$$

であるので $\mu$-a.e.$x \in X$ で $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)\} < \infty$. 従って $\mu$-a.e.$x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
注意 : 上記証明では $(X, \mathcal{M}, \mu)$ に関する $\sigma$-有限性は必要ないが, Fubini の定理を用いて積分と $\sum$ の交換をする場合には必要である.

**解答 1.3.**

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| < +\infty$$

より，$x \in [0,1]$ について級数 $\sum_{n\geq 1} a_n f_n(x)$ は収束する．同様にして，$x \in [0,1]$ について級数 $\sum_{n\geq 1} a_n f_n'(x)$ も収束する．

$$\begin{aligned} F_n(x) &:= \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x), \quad G_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k f_k'(x), \\ F(x) &:= \sum_{n\geq 1} a_n f_n(x), \quad G(x) := \sum_{n\geq 1} a_n f_n'(x) \end{aligned}$$

とするとき，$n < m$ を満たす自然数 $m, n$ に対して，

$$\begin{aligned} \max_{x\in[0,1]} |F_n(x) - F_m(x)| &= \max_{x\in[0,1]} \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \max_{x\in[0,1]} |f_k(x)| \\ &\to 0 \quad (m, n \to \infty) \end{aligned}$$

となるので，$F_n(x)$ は $F(x)$ に $[0,1]$ 上一様収束する．同様にして，$G_n(x)$ も $G(x)$ に $[0,1]$ 上一様収束する．よって，$F(x), G(x)$ は $[0,1]$ で連続である．また，$x \in [0,1]$ に対して，

$$\begin{aligned} \int_0^x G(t)dt &= \int_0^x \left( \sum_{n\geq 1} a_n f_n'(t) \right) dt \\ &= \sum_{n\geq 1} \left( \int_0^x a_n f_n'(t)dt \right) \\ &= \sum_{n\geq 1} (a_n f_n(x) - a_n f_n(0)) \\ &= F(x) - F(0) \end{aligned}$$

であるから，$F'(x) = G(x)$ であることが分かる．以上により，$F(x) = \sum_{n\geq 1} a_n f_n(x)$ は $[0,1]$ 上 $C^1$ 級である．

**解答 1.4.** $f_n(x) = \sin n\pi x$ とすると，

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \leq \sum_{n\geq 1} |a_n| < +\infty$$

となるので，**1.3** の証明から $f$ は $[0,1]$ 上連続である．

次に，$t > 0$ ならば，

$$\max_{x\in[0,1]} \left| e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x \right| \leq 1$$

なので，$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \max_{x\in[0,1]} \left| e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x \right| < +\infty$ が成り立つ．同様に，

$$\max_{x\in[0,1]} \left| k\pi e^{-k^2\pi^2 t} \cos k\pi x \right|, \quad \max_{x\in[0,1]} \left| k^2\pi^2 e^{-k^2\pi^2 t} \sin k\pi x \right|$$

は $k$ について一様に有界なので，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\max_{x\in[0,1]}\left|k\pi e^{-k^2\pi^2 t}\cos k\pi x\right|<+\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\max_{x\in[0,1]}\left|k^2\pi^2 e^{-k^2\pi^2 t}\sin k\pi x\right|<+\infty$$

が成り立つ．従って，**1.3** より，$u(x,t)$ は $x$ について $(0,1)$ で 2 階微分可能で，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k k^2\pi^2 e^{-k^2\pi^2 t}\sin k\pi x$$

が成り立つことが分かる．$t$ についての微分可能性についても同様に議論することにより，

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k k^2\pi^2 e^{-k^2\pi^2 t}\sin k\pi x\quad (t>0)$$

を得る．よって，$u$ は $t>0, x\in(0,1)$ で $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たす．$u(x,0)=f(x), u(0,t)=u(1,t)=0$ は明らか．