解析学 II 演習 2 解答

解答 2.1.

(i) $\|\cdot\|_1$ が $\mathbb{R}^n$ の norm であること：

$^\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $^\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$ に対し，

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|\geq 0,\ \text{等号成立は}^\forall i\text{ に対し }|x_i|\leq\sum_{i=1}^n|x_i|=0\quad\therefore x=0,\\ \|\lambda x\|_1 &= \sum_{i=1}^n|\lambda x_i|=|\lambda|\sum_{i=1}^n|x_i|=|\lambda|\cdot\|x\|_1,\\ \|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^n|x_i+y_i|\leq\sum_{i=1}^n(|x_i|+|y_i|)\leq\sum_{i=1}^n|x_i|+\sum_{i=1}^n|y_i|=\|x\|_1+\|y\|_1.\end{aligned}$$

そして，$x=0\Rightarrow\|x\|_1=0$ は明らか。以上から，示された。

(ii) $\|\cdot\|_2$ が $\mathbb{R}^n$ の norm であること：

$^\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $^\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$ に対し，

$$\begin{aligned}\|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i)^2}\geq 0,\ \text{等号成立は}^\forall i\text{ に対し }|x_i|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i)^2}=0\quad\therefore x=0,\\ \|\lambda x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n(\lambda x_i)^2}=\sqrt{\lambda^2\cdot\sum_{i=1}^n(x_i)^2}=|\lambda|\cdot\|x\|_2,\\ \|x+y\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i)^2+\sum_{i=1}^n(y_i)^2+2\sum_{i=1}^n x_iy_i} \qquad (1)\\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i)^2+\sum_{i=1}^n(y_i)^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n(y_i)^2}} \qquad (2)\\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n(y_i)^2}\right)^2}=\|x\|_2+\|y\|_2.\end{aligned}$$

ここで，(1) 式から (2) 式への変形には，Schwartz の不等式 $\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n(y_i)^2}$ を用いた。そして，$x=0\Rightarrow\|x\|_2=0$ は明らか。以上から，示された。

(iii) $\|\cdot\|_\infty$ が $\mathbb{R}^n$ の norm であること：

${}^\forall\lambda \in \mathbb{R}$, ${}^\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \geq 0,\ \text{等号成立は}{}^\forall i \text{ に対し } |x_i| \leq \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = 0 \quad \therefore x = 0, \\
\|\lambda x\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda x_i| = |\lambda| \cdot \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty, \\
\|x+y\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1,\ldots,n} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| + \max_{i=1,\ldots,n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.
\end{aligned}$$

そして， $x = 0 \Rightarrow \|x\|_\infty = 0$ は明らか。以上から，示された。

最後に不等式を示す。

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = \sqrt{\max_{i=1,\ldots,n} (x_i)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} = \|x\|_2 \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2 + \sum_{i \neq j} |x_i| \cdot |x_j|} \\
&= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2} = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1 \\
&\leq n \cdot \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| = n\|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

解答 2.2.

(1)　$\{f_n\}_{n\geq 1}$ は $C([0,1])$ における Cauchy 列であるから，任意の ϵ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m, n \geq N$ ならば

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon/2$$

が成り立つ．従って，任意の $x \in [0,1]$ に対して，$m, n \geq N$ ならば

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon/2 \tag{3}$$

であるから，$\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ は実数列として Cauchy 列である．

(2)　単に (3) において $m \to \infty$ とするだけであるが，念のため $\epsilon - N$ を用いて示す．

最初に，N は $x \in [0,1]$ に依らないことに注意する．任意の $x \in [0,1]$ を取ると，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ であるから，ある $M = M(x) \geq N$ が存在して

$$|f_M(x) - f(x)| < \epsilon/4. \tag{4}$$

(3),(4) より，$n \geq N$ なる任意の $n \in \mathbb{N}$ 及び 任意の $x \in [0,1]$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/4 = 3\epsilon/4.$$

従って，$n \geq N$ ならば

$$\|f_n - f\|_\infty \leq 3\epsilon/4 < \epsilon. \tag{5}$$

が成り立つ．

(3)　任意の $n \in \mathbb{N}$ 及び任意の $x, y \in [0,1]$ に対して，三角不等式より

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)| \leq |f_n(x)-f_n(y)|+2\|f-f_n\|_\infty. \tag{6}$$

(4)　$x \in [0,1]$ とし，任意の $\epsilon > 0$ を取る．(5) より，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|f - f_N\|_\infty < \epsilon/3 \tag{7}$$

が成り立つ．また，$f_N \in C([0,1])$ であるから，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-y| < \delta$ となる任意の $y \in [0,1]$ に対して

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \epsilon/3. \tag{8}$$

(6), (7) 及び (8) より $|x-y| < \delta$ となる任意の $y \in [0,1]$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

が成り立つので，$f \in C([0,1])$ である．また，(5) より

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

解答 2.3.　$|x| = ||x||_2$ であることに注意。

$$||x|| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| ||e_i|| \leq \big(\max_{i=1,\ldots,n} ||e_i||\big) ||x||_1$$

演習 2.1 の (1) より $||x|| \leq c|x|$. いま $\sup_{x\neq 0} |x|/||x|| = +\infty$ とすると、ある $\{x_n\}_{n\geq 1}$ があって、$|x_n|/||x_n|| \to \infty$ as $n \to \infty$. ここで $y_n = x_n/|x_n|$ とすると、$|y_n| = 1$ かつ $||y_n|| \to 0$ as $n \to \infty$. ここで $\{x||x| = 1\}$ はコンパクトなので $\{y_n\}_{n\geq 1}$ の部分列 $\{z_m\}_{n\geq 1}$ で, ある $|z| = 1$ に対して $z_m \to z$ as $m \to \infty$ かつ $||z_n|| \to 0$ as $n \to \infty$ となるものがある。ここで、

$$0 \leq ||z|| \leq ||z - z_m|| + ||z_m|| \leq c|z - z_m| + ||z_m||$$

$m \to \infty$ で上の式の右辺は 0 に収束するので $||z|| = 0$. $z \neq 0$ なので矛盾。よって $\sup_{x\neq 0} |x|/||x|| < +\infty$.

問題

$(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とし，$B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ とする．このとき，B がコンパクトであることと X が有限次元であることは同値であることを示せ．

解答

X が有限次元であれば，B は有界閉集合であるからコンパクトである．逆を示すために，次のことに注意する．

命題 1. X の任意の有限次元部分空間 M も Banach 空間である．

命題 2. M を X の閉部分空間で，$M \neq X$ とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $x_\epsilon \in B$ が存在して，

$$\mathrm{dist}(x_\epsilon, M) > 1 - \epsilon$$

を満たす．

命題の証明は後に回すことにして，先に問題の解答を与える．

X が無限次元のとき，B はコンパクトでないことを示す．$x_1 \in B \backslash \{0\}$ を取り，$M_1 = \mathrm{span}\{x_1\}$ とおく．命題 1 により M_1 は X の閉部分空間であり，命題 2 により $x_2 \in B$ を $\mathrm{dist}(x_2, M_1) > 1/2$ となるように取ることが出来る．$M_2 = \mathrm{span}\{x_1, x_2\}$ とおけば，命題 1 により M_2 は X の閉部分空間であり，命題 2 により $x_3 \in B$ を $\mathrm{dist}(x_3, M_2) > 1/2$ となるように取ることが出来る．以下同様にして $x_1, x_2, \cdots \in B$ を取ることが出来る．$k \neq k'$ のとき $\|x_k - x_{k'}\| > 1/2$ なので，$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を含まない．従って，B はコンパクトでない．

命題 1 を示す．簡単のため，X は実ベクトル空間とする．X の有限次元部分空間 M が閉部分空間であることを示せば良い．即ち，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, $x_n \to x_0$ in X のとき $x_0 \in M$ であることを示せば良い．M は有限次元であるから $m := \dim M < \infty$ であり，M の基底 $\{e_k\}_{k=1,\dots,m}$ が存在する．このとき，各 $x \in M$ に対して

$$x = \sum_{k=1}^{m} x^k e_k$$

となる $\{x^k\}_{k=1,\dots,m} \subset \mathbb{R}$ が一意に存在する．

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{m} |x^k|$$

と定めると，$\|\cdot\|_1$ は M 上のノルムであり，有限次元ノルム空間におけるノルムは全て同値であるから，ある $C > 0$ が存在して，任意の $x \in M$ に対して

$$\frac{1}{C}\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C\|x\|_1 \tag{9}$$

が成り立つ．$x_n \in M$ なので，

$$x_n = \sum_{k=1}^{m} x_n^k e_k$$

となるような $\{x_n^k\}_{k=1,\dots,m} \subset \mathbb{R}$ が (x_n に対して一意に) 定まり，(9) より

$$|x_n^k - x_{n'}^k| \leq \|x_n - x_{n'}\|_1 \leq C\|x_n - x_{n'}\| \to 0,\ n, n' \to \infty.$$

即ち，各 $k \in \{1, \dots, m\}$ に対して，$\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ は実数上の Cauchy 列であり収束する．$\{x_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限を x_0^k と書き，

$$x_0' := \sum_{k=1}^{m} x_0^k e_k$$

と置けば，(9) より

$$\|x_n - x_0'\| \le C\,\|x_n - x_0'\|_1 = C\sum_{k=1}^{m} |x_n^k - x_0^k| \to 0,\ n \to \infty.$$

即ち，$x_n \to x_0'$ in X であるが，極限の一意性から $x_0 = x_0' \in M$ であり， M は閉部分空間である．

命題 2 を示す． $M \neq X$ より，$x \in X \backslash M$ となる x が存在する．$\alpha = \mathrm{dist}(x, M)$ と置くと，M は閉なので $\alpha > 0$ である．$\alpha = \inf_{y\in M} \|x - y\|$ なので，$\|x_n - x\| \to \alpha$ を満たすような列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ が存在する．$y_n = (x - x_n)/\|x - x_n\|$ とおくと，$\|y_n\| = 1$. 任意の $y \in M$ に対して，$x_n + \|x - x_n\|\, y \in M$ なので，α の定義より

$$\|y_n - y\| = \frac{1}{\|x - x_n\|}\,\|x - (x_n + \|x - x_n\|\, y)\| \ge \frac{\alpha}{\|x - x_n\|}.$$

従って，$y \in M$ について下限を取れば，

$$\mathrm{dist}(y_n, M) \ge \frac{\alpha}{\|x - x_n\|} \to 1,\ n \to \infty.$$

また，$\|y_n\| = 1$ なので，$\epsilon > 0$ に対して n を十分大きく取れば， $\mathrm{dist}(y_n, M) > 1 - \epsilon$ が成り立つ．