解析学 2 演習 3　　　　　　　担当　木上

演習 3.1. m_1 を 1 次元 Lebesgue 測度（の区間 $[0,1]$ への制限）とする。$1 \le p < +\infty$ に対して $L^p([0,1], m_1)$ の Cauhy 列 $\{f_m\}_{m \ge 1}$ で任意の $x \in [0,1]$ に対して $\{f_m(x)\}_{m \ge 1}$ が収束しないような例を作れ。
[ヒント：$n = 0, 1, \ldots, m = 0, \ldots, 2^n - 1$ に対して $A_{2^n+m} = [m/2^n, (m+1)/2^n]$ とおいて、$A_1, A_2, \ldots$ を定義する。$f_i = \chi_{A_i}$ とおく。ただし χ_A は集合 A の定義関数である。]

演習 3.2. m_1 を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度とし、$L^p = L^p(\mathbb{R}, m_1)$ とする。次の (1), (2), に対して正しければ証明し、間違っていれば反例を挙げよ。
(1)　$L^1 \subseteq L^2$
(2)　$L^2 \subseteq L^1$.

演習 3.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。
(1)　$S = \{f | f$ は μ-可積分な単関数$\}$ とするとき、任意の $1 \le p < \infty$ に対して S は $L^p(X, \mu)$ の稠密な部分集合であいことを示せ。
(2)　$1 \le p < \infty, 1 \le q \le \infty$ とするとき、$L^p \cap L^q$ は L^p で稠密であることを示せ。

演習 3.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。
(1)　$\mu(X) < +\infty$ のとき任意の $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ に対して、$L^{p_2}(X, \mu) \subseteq L^{p_1}(X, \mu)$ であり任意の $f \in L^{p_2}(X, \mu)$ に対して

$$||f||_{p_1} \le \mu(X)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} ||f||_{p_2}$$

を示せ。
(2)　$p \in [1, \infty)$ とする。$L^p(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu)$　が $L^\infty(X, \mu)$ で稠密となるための必要十分条件は $\mu(X) < +\infty$ であることを示せ。

[ヒント：(1) $p = p_2/p_1, q = p_2/(p_2 - p_1)$, $F = |f|^{p_1}, G = \chi_X$ として Hölder の不等式を使う。(2) $1 = \chi_X \in L^\infty(X, \mu)$. $||1 - f||_\infty \le 1/2$ のとき $||f||_\infty$ は？]

演習 3.5. $(V, ||\cdot||)$ をノルム空間とする。
(1) U を V の閉部分空間とし $U \neq V$ とする。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して $||v|| = 1$ かつ

$$\inf_{u \in U} ||v - u|| \geq 1 - \epsilon$$

をみたす $v \in V$ が存在することを示せ。
(2) $(V, ||\cdot||)$ を Banach 空間とする。$D = \{v | v \in V, ||v|| \leq 1\}$ とおく。D が compact であるための必要十分条件は V が有限次元であることを示せ。
[ヒント：(1) $x \in V \backslash U$ に対して $\alpha = \inf_{y \in U} ||x - y||$ とおく。$\alpha > 0$ であり、任意の $y, u \in U$ に対して

$$\left|\left|\frac{x - y}{||x - y||} - u\right|\right| = \frac{||x - y - ||x - y|| \cdot u||}{||x - y||} \geq \frac{\alpha}{||x - y||}.$$

(2) V が無限次元とすると $e_1, e_2, \ldots$ で任意の n に対して $(e_1, \ldots, e_n)$ が1次独立なものがとれる。$(e_1, \ldots, e_n)$ から生成される部分空間を U_n とおくとき、$u_n \in U_n$ で $\inf_{u \in U_{n+1}} ||u_n - u|| \geq 1/2$ をみたすものがある。]