解析学 II 演習 3 解答

解答 3.1. $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\}$ とおく．$n = 0, 1, \ldots, m = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$ に対して，$A_{2^n+m} = [m/2^n, (m+1)/2^n]$ とし，$f_k = \chi_{A_k}$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とする．$k \in \mathbb{N}$ に対して，$k = 2^n + m$ となる $(n, m) = (n(k), m(k)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \{0, 1, \ldots, 2^{n-1}\}$ は一意に定まることに注意すると，

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 \chi_{A_k}(x) dx \right)^{1/p} = 2^{-pn} \to 0,\ k \to \infty.$$

即ち，$f_k \to 0$ in L^p であるから，$\{f_k\}$ は $L^p([0, 1])$ 上の Cauchy 列である．

一方，任意の $x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m2^{-n} \leq x < (m+1)2^{-n}$$

を満たす $m = m(x, n) \in \{0, 1, \ldots, 2^{n-1}\}$ は一意に定まり，$x \in A_{2^n+m}$ である．また，$l \neq m(x, n)$ のとき $x \notin A_{2^n+l}$ である．故に，$\{f_k(x)\}$ の集積点は $\{0, 1\}$ であり，$\{f_k(x)\}$ は収束しない．

解答 3.2.

(1) 反例が存在する. 実際,

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/2} & x \in (0, 1), \\ 0 & x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \end{cases}$$

とすると

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dm_1 = \int_0^1 x^{-1/2} dm_1 = 2,$$
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dm_1 = \int_0^1 x^{-1} dm_1 = \infty$$

となるので $f \in L^1(\mathbb{R}, m_1)$ かつ $f \notin L^2(\mathbb{R}, m_1)$.

(2) 反例が存在する. 実際,

$$g(x) = \begin{cases} x^{-1} & x \in (1, +\infty), \\ 0 & x \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

とすると

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dm_1 = \int_1^\infty x^{-1} dm_1 = \infty,$$
$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dm_1 = \int_1^\infty x^{-2} dm_1 = 1$$

となるので $g \in L^2(\mathbb{R}, m_1)$ かつ $g \notin L^1(\mathbb{R}, m_1)$.

解答 3.3.

(1) $f \in L^p(X)$ とし，$f = f_+ - f_-, f_+ = \max(f, 0), f_- = -\min(f, 0)$ と分ける．$f_\pm$ は非負値可

測関数なので，$s_{\pm,n} \nearrow f_\pm$ を満たす μ-可測な非負値単関数列 $\{s_{\pm,n}\}$ が存在する．$s_{\pm,n} \leq f_\pm$ 及び $f \in L^p(X)$ なので，$s_{\pm,n}$ は可積分である．実際,

$$s_{\pm,n} = \sum_{k=1}^{N(n)} a_k^{(n)} \chi_{A_k^{(n)}},\ a_k^{(n)} \in \mathbb{R}_{>0},\ A_k^{(n)} \in \mathcal{M},\ k = 1, \ldots, N(n)$$

と置くと，各 $x \in X$ に対して

$$s_{\pm,n}^p(x) = \sum_{k=1}^{N(n)} (a_k^{(n)})^p \chi_{A_k^{(n)}}(x) \leq f_\pm^p(x).$$

$f \in L^p(X)$ なので，$f_\pm \in L^p(X)$ であり，$s_{\pm,n}^p \in L^1(X)$. 従って,

$$\mu(A_k^{(n)}) < \infty,\ k = 1, \ldots, N(n).$$

故に，$s_{\pm,n}$ は可積分である．

$|s_{\pm,n} - f_\pm|^p \leq f_\pm^p$ なので，Lebesgue の収束定理より $s_{\pm,n} \to f_\pm$ in $L^p(X)$．よって，$s_n := s_{+,n} - s_{-,n} \to f_+ - f_- = f$ in $L^p(X)$ である．また，$\{s_n\} \subset S$ であるから，S は $L^p(X)$ において稠密である．

(2) $S = \{f | f$ は μ-可積分単関数$\}$ とおき，$S \subset L^p(X) \cap L^q(X)$ を示せば，$1 \leq p < \infty$ なので (1) により $L^p(X) \cap L^q(X)$ は $L^p(X)$ において稠密であることが従う．$s \in S$ とし,

$$s = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_k},\ a_k \in \mathbb{R} \backslash \{0\},\ A_k \in \mathcal{M}$$

とおく．$s \in S$ より，$\mu(A_k) < \infty,\ k = 1, \ldots, N.$ $q < \infty$ のとき,

$$\|s\|_q = \left(\int_X \sum_{k=1}^{N} |a_k|^q \chi_{A_k}(x) dx \right)^{1/q} \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k| \mu(A_k)^{1/q} < \infty.$$

$q = \infty$ のとき,

$$\|s\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq N} |a_k| < \infty.$$

故に，$q \in [1, \infty]$ に対して $s \in L^p(X) \cap L^q(X)$. よって，$L^p(X) \cap L^q(X)$ は $L^p(X)$ において稠密である．

解答 3.4.

(1) 主張の不等式を示せばよい．

$\cdot$ $p_2 < +\infty$ のとき, Hölder の不等式を用いれば

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_1}^{p_1} &= \|\chi_X \cdot |f|^{p_1}\|_1 \\ &\leq \|\chi_X\|_{p_2/(p_2-p_1)} \||f|^{p_1}\|_{p_2/p_1} \\ &= \mu(X)^{(p_2-p_1)/p_2} \|f\|_{p_2}^{p_1} \end{aligned}$$

より求めるものが得られる．

$\cdot\ p_2 = +\infty$ のとき，

$$\begin{aligned}\|f\|_{p_1}^{p_1} &= \int_X |f(x)|^{p_1} d\mu \\ &\leq \int_X d\mu \, \|f\|_\infty^{p_1} \\ &= \mu(X) \, \|f\|_\infty^{p_1}\end{aligned}$$

より求めるものが得られる．

(2)　以下簡単のために $L^p = L^p(X, \mu)$ と書く．

$\cdot\ \mu(X) < +\infty$ とすると (1) より $L^p \cap L^\infty = L^\infty$ なので $L^p \cap L^\infty$ は L^∞ で稠密．

$\cdot\ \mu(X) = +\infty$ とすると $L^p \cap L^\infty$ は L^∞ で稠密でないことを示す．もし稠密であるとすると $\chi_X \in L^\infty$ なので

$$\|\chi_X - f\|_\infty < 1/2$$

なる $f \in L^p \cap L^\infty$ が存在する．f の取り方より $Y = \{x \in X; |\chi_X(x) - f(x)| \leq 1/2\}$ とすると $\mu(Y) = +\infty$. また $x \in Y$ に対して $f(x) \geq 1/2$. これらより

$$\int_X |f(x)|^p d\mu \geq \int_Y |f(x)|^p d\mu \geq \frac{1}{2^p}\mu(Y) = +\infty$$

となるがこれは $f \in L^p$ に矛盾. 従って $L^p \cap L^\infty$ は L^∞ で稠密でない.

問題

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間であって

- $\mu(X) < +\infty$,
- 任意の $x \in X$ に対して $\{x\} \in \mathcal{M}$ であって $\mu(\{x\}) = 0$

を満たすものとする. このとき $X_1, \cdots, X_n \in \mathcal{M}$ で

- $X = \bigcup_{j=1}^n X_j$,
- $\mu(X_j) \leq \dfrac{1}{2}\mu(X)$

を満たすものは存在するか否か?

解答

存在しない. 実際 $X = [0, 1]$ とし, $\mathcal{M}$ を $\emptyset$, X, X の部分集合で高々可算なもの, そして補集合が高々可算なものからなるとする. また μ を $A \subset X$ が高々可算なら $\mu(A) = 0$, $X \setminus A$ が高々可算なら $\mu(A) = 1$ とすればこれは反例となる.