解析学 2 演習 4　　　　　　　担当　木上

演習 4.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。このとき任意の $p \in [1, \infty]$ に対して $f \in L^p(X, \mu)$ となるための必要十分条件は $f \in L^1(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu)$ であることを示せ。

演習 4.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。$1 \le p \le q \le \infty$ に対して、

$$\bigcap_{r \in [p,q]} L^r(X, \mu) = L^p(X, \mu) \cap L^q(X, \mu)$$

を示せ。

演習 4.3. $(V, (\cdot, \cdot))$ を pre-Hilbert space とし、$x \in V$ に対して $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ とおく。このとき任意の $x, y \in V$ に対して、

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \tag{1}$$

を示せ。

演習 4.4. $(V, ||\cdot||)$ を実 norm 空間とする。任意の $x, y \in V$ に対して (1) が成り立つとする。このとき、V の内積 $(\cdot, \cdot)$ で $||x||^2 = (x, x)$ をみたすものが存在することを示せ。
[ヒント：もし $(\cdot, \cdot)$ が存在するなら $4(x, y) = (x + y, x + y) - (x - y, x - y)$]

演習 4.5. $(V, (\cdot, \cdot))$ を pre-Hilbert space ,$\{x_n\}_{n \ge 1} \subset V$ とする。$x \in V$ に対して $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ と定義する。ある $c \ge 0$ に対して任意の $n, m \ge 1$ で

$$||\frac{x_n + x_m}{2}|| \ge c \qquad \text{かつ} \qquad \lim_{n \to \infty} ||x_n|| = c$$

をみたすとする。このとき $\{x_n\}_{n \ge 1}$ は V の Cauchy 列となることを示せ。