# 解析学 II 演習 4 解答

**解答 4.1.**

$$\bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p(X,\mu) = L^1(X,\mu)\cap L^\infty(X,\mu)$$

を示せばよい．$\bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p(X,\mu) \subset L^1(X,\mu)\cap L^\infty(X,\mu)$ は明らかなので，$\bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p(X,\mu) \supset L^1(X,\mu)\cap L^\infty(X,\mu)$ を示す．$f\in L^1(X,\mu)\cap L^\infty(X,\mu)$ とし，$p\in(0,\infty)$ とすると，

$$\int_X |f(x)|^p\,d\mu = \int_x |f(x)|\,|f(x)|^{p-1}\,d\mu \le \|f\|_{L^\infty}^{p-1}\int_X |f(x)|\,d\mu \le \|f\|_{L^\infty}^{p-1}\|f\|_{L^1}$$

が成立するので，$f\in L^p(X,\mu)$ となる．よって，$L^p(X,\mu)\supset L^1(X,\mu)\cap L^\infty(X,\mu)$ であるが，ここで $p\in(0,\infty)$ は任意なので，$\bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p(X,\mu)\supset L^1(X,\mu)\cap L^\infty(X,\mu)$ である．

**解答 4.2.** $\bigcap_{r\in[p,q]} L^r(X,\mu)\subset L^p(X,\mu)\cap L^q(X,\mu)$ は明らかなので，$\bigcap_{r\in[p,q]} L^r(X,\mu)\supset L^p(X,\mu)\cap L^q(X,\mu)$ を示す．$f\in L^p(X,\mu)\cap L^q(X,\mu)$ とし，$r\in(p,q)$ とする．

$r=p\theta+q(1-\theta)$ となる $\theta\in(0,1)$ をとり，$\frac{1}{\alpha}=\theta, \frac{1}{\beta}=1-\theta$ となる $\alpha,\beta$ をとる．このとき，$r_1=\frac{p}{\alpha}, r_2=\frac{q}{\beta}$ とすると Hölder の不等式により，

$$\||f|^r\|_{L^1}\le \||f|^{r_1}\|_{L^\alpha}\,\||f|^{r_2}\|_{L^\beta}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\||f|^r\|_{L^1} &= \int_X |f(x)|^r\,d\mu = \|f\|_{L^r}^r\\
\||f|^{r_1}\|_{L^\alpha} &= \left[\left\{\int_X |f(x)|^{\alpha r_1}\,d\mu\right\}^{\frac{1}{\alpha r_1}}\right]^{r_1} = \|f\|_{L^{\alpha r_1}}^{r_1}\\
\||f|^{r_2}\|_{L^\beta} &= \left[\left\{\int_X |f(x)|^{\beta r_2}\,d\mu\right\}^{\frac{1}{\beta r_2}}\right]^{r_2} = \|f\|_{L^{\beta r_2}}^{r_2}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\|f\|_{L^r}^r \le \|f\|_{L^p}^{r_1}\|f\|_{L^q}^{r_2}<\infty$$

となり，$f\in L^r(X,\mu)$ が従う．よって，$L^r(X,\mu)\supset L^p(X,\mu)\cap L^q(X,\mu)$ であるが，ここで $r\in(p,q)$ は任意なので，$\bigcap_{r\in[p,q]} L^r(X,\mu)\supset L^p(X,\mu)\cap L^q(X,\mu)$ である．

**解答 4.3.**

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= (x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\
&= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)+(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y)\\
&= 2\|x\|^2+2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

**解答 4.4.**

$V \times V$ から $\mathbb{R}$ への写像 $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ を

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad (x,y \in V)$$

で定める。これが内積であることを示す。以下，$x,y,z \in V$ とする。

**ノルムとの一致** $(x,x) = \frac{1}{4}(\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2.$

これより，$(x,x) \geq 0$，$(x,x) = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ が示される。

**対称性**

$$\begin{aligned}(y,x) = \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|-(x-y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = (x,y).\end{aligned}$$

**線型性**

$$\begin{aligned}(x,z)+(y,z) &= \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2) \\ &= \frac{1}{4}\{\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - (\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2)\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}(\|(x+z)+(y+z)\|^2 + \|(x+z)-(y+z)\|^2\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}(\|(x-z)+(y-z)\|^2 + \|(x-z)-(y-z)\|^2\right\} \\ &= \frac{1}{8}(\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2).\end{aligned}$$

ここで，次の 2 式

$$\begin{cases} \|(x+y+z)+z\|^2 + \|(x+y+z)-z\|^2 = 2\|x+y+z\|^2 + 2\|z\|^2, \\ \|(x+y-z)+z\|^2 + \|(x+y-z)-z\|^2 = 2\|x+y-z\|^2 + 2\|z\|^2 \end{cases}$$

の上の式から下の式を引くと，

$$\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2 = 2(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2)$$

が示される。よって，

$$\begin{aligned}(x,z)+(y,z) &= \frac{1}{8}\cdot 2(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2) = (x+y,z).\end{aligned}$$

**スカラー倍** $(\alpha x, y) = \alpha(x,y) \quad (x,y \in V, \alpha \in \mathbb{R})$ 　　線型性から，$n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(nx,y) &= (\overbrace{x+\cdots+x}^{n\text{ 個}},y)=(x,y)+(\overbrace{x+\cdots+x}^{n-1\text{ 個}},y)\\
&= \cdots = \overbrace{(x,y)+\cdots+(x,y)}^{n\text{ 個}} = n(x,y)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，一方，

$$0=(0,y)=(x+(-x),y)=(x,y)+(-x,y) \quad \therefore (-x,y)=-(x,y)$$

が成り立つ。そして，$m\in\mathbb{N}$ に対し，

$$(x,y)=\left(m\left(\frac{1}{m}x\right),y\right)=m\left(\frac{1}{m}x,y\right) \quad \therefore \left(\frac{1}{m}x,y\right)=\frac{1}{m}(x,y)$$

が成り立つ。以上から，$\gamma\in\mathbb{Q}$ に対し，$\gamma=\dfrac{n}{m}\ \ (m,n\in\mathbb{Z})$ と表すことができるので，

$$(\gamma x,y)=\left(\frac{n}{m}x,y\right)=\left(n\left(\frac{1}{m}x\right),y\right)=n\left(\left(\frac{1}{m}x\right),y\right)=\frac{n}{m}(x,y)=\gamma(x,y)$$

が成り立つ。

まず，$\alpha\in\mathbb{R}$ に対し，$\{a_n\}$ を $\alpha$ に収束する有理数列とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\|a_nx-\alpha x\|=\lim_{n\to\infty}\|(a_n-\alpha)x\|=\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|\cdot\|x\|=0$$

であるから，点列 $\{a_nx\}$ は $\alpha x$ に収束する。そして，ノルムの満たす三角不等式から，

$$\|y\|-\|a_nx-\alpha x\|\le\|a_nx-\alpha x+y\|\le\|a_nx-\alpha x\|+\|y\|.$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|a_nx-\alpha x+y\|=\|y\|$ が成り立つ。ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\alpha(x,y)-(\alpha x,y) &= \lim_{n\to\infty}(a_n(x,y)-(\alpha x,y))\\
&= \lim_{n\to\infty}((a_nx,y)-(\alpha x,y))\\
&= \lim_{n\to\infty}(a_nx-\alpha x,y)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}(\|a_nx-\alpha x+y\|^2-\|a_nx-\alpha x-y\|^2)\\
&= \frac{1}{4}(\|y\|^2-\|y\|^2)=0. \quad \therefore (\alpha x,y)=\alpha(x,y).
\end{aligned}
$$

以上から，$(\cdot,\cdot)$ は $V$ 上の内積である。

**解答 4.5.**

条件から，${}^\forall n\in\mathbb{N}$ に対し，$\|x_n\|\ge c$ で，一方，${}^\forall\varepsilon>0$ に対し，${}^\exists N\le n$ ならば $\|x_n\|<\sqrt{c^2+\frac{\varepsilon^2}{4}}$ が成り立つ。このとき，**演習 4.3.** (1) と条件より，

$$
\begin{aligned}
\|x_n-x_m\|^2+4c^2 &\le \|x_n-x_m\|^2+\|x_n+x_m\|^2\\
&= 2\|x_n\|^2+2\|x_m\|^2.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$0 \leq \|x_n - x_m\|^2 \leq 2\{(\|x_n\|^2 - c^2) + (\|x_m\|^2 - c^2)\}.$$

以上から，${}^\forall \varepsilon > 0$ に対し，${}^\exists N \leq n, m$ ならば，

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\{(\|x_n\|^2 - c^2) + (\|x_m\|^2 - c^2)\} < 2\left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \varepsilon^2,$$

すなわち，$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$。ゆえに，$\{x_n\}_{n\geq 1}$ は $V$ の Cauchy 列である。