解析学 2 演習 5　　　　　　担当　木上

演習 5.1. $[0,2\pi)$ 上定義された次の関数の Fourier 級数展開を求めよ。
(1)　$f(x)=x$
(2)　$[0,\pi)$ 上で $f(x)=-1$, $[\pi,2\pi)$ 上で $f(x)=1$.

演習 5.2. (1) $\theta\in\mathbb{R}$ に対して $T_\theta:L^2(S^1)\to L^2(S^1)$ を $(T_\theta f)(x)=f(x-\theta)$ と定義する。f と $T_\theta f$ の Fourier 級数展開の間の関係を求めよ。
(2) $R:L^2(S^1)\to L^2(S^1)$ を $(Rf)(x)=f(-x)$ と定義する。このとき f と Rf の Fourier 級数展開の間の関係を求めよ。

演習 5.3. (1)　$f,g\in L^2(S^1)$ に対して、

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x-y)g(y)dy$$

と定義する。このとき $f*g\in L^2(S^1)$ であり、$||f*g||_2\le||f||_2||g||_2$ が成立することを示せ。
(2)　$f,g\in L^2(S^1)$ に対して $f,g,f*g$ の Fourier 級数展開をそれぞれ $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\varphi_n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_n\varphi_n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\varphi_n$ とするとき、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の間の関係を求めよ。

演習 5.4. $\Delta:C^\infty(S^1)\to C^\infty(S^1)$ を $(\Delta f)(x)=f''(x)$ と定義する。
(1)　$f\in C^\infty(S^1),\lambda\in\mathbb{C}$ に対して $\Delta f=-\lambda f$ となるとき $\lambda\in[0,+\infty)$ であることを示せ。
(2)　「$f\in C^\infty(S^1),\lambda\in\mathbb{C}$ に対して $\Delta f=-\lambda f$ となるための必要十分条件はある $n\in\{0,1,\ldots\},a,b\in\mathbb{C}$ に対して $\lambda=n^2$ で $f=a\varphi_n+b\varphi_{-n}$ と表されることである。」これを示せ。
(3)　$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(S^1)$ の完全正規直交系であることを認める。$u_0\in L^2(S^1)$ に対して、$x\in S^1,t>0$ で

$$u(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(u_0,\varphi_n)e^{-n^2t}\varphi_n(x)$$

と定義する。このとき $u(x,t)$ は $S^1\times(0,+\infty)$ 上で C^2 級であり、$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ をみたすことを示せ。さらに $u_t(x)=u(x,t)$ するとき、$t\downarrow 0$ で $||u_0-u_t||_2\to 0$ を示せ。