解析学 II 演習 5 解答

解答 5.1. $F_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ とすると f の Fourier 級数展開は次のものであった.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx}.$$

(1)

$$F_0(f) = \pi$$

であり, $n \neq 0$ に対して部分積分により

$$F_n(f) = \frac{i}{n}$$

であるので f の Fourier 級数展開は

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx} = \pi + \sum_{n\neq 0} \frac{i}{n}e^{inx}.$$

(2)

$$F_0(f) = 0$$

であり, $n \neq 0$ に対して

$$F_n(f) = \frac{i}{n\pi}\left\{1 + (-1)^{n-1}\right\}$$

であるので f の Fourier 級数展開は

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2i}{(2n-1)\pi}e^{i(2n-1)x}.$$

解答 5.2.

(1) f の周期性を用いることにより

$$\begin{aligned}
F_n(T_\theta f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\theta)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{2\pi-\theta} f(s)e^{-in(s+\theta)}ds \\
&= e^{-in\theta}F_n(f).
\end{aligned}$$

(2) f の周期性を用いることにより

$$\begin{aligned}
F_n(Rf) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(s)e^{ins}ds \\
&= F_{-n}(f).
\end{aligned}$$

解答 5.3.
(1) $f_x(y) = f(x-y)$ とする. Hölder の不等式を用いることにより

$$
\begin{aligned}
|f * g(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} |f(x-y)g(y)| dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_x \cdot g\|_1 \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_x\|_2 \|g\|_2
\end{aligned}
$$

であり, $\|f_x\|_2 = \|f\|_2$ となるので

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f * g(x)|^2 dx &\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \|f_x\|_2^2 \|g\|_2^2 \, dx \\
&= \|f\|_2^2 \|g\|_2^2 .
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
c_n &= (f * g, \varphi_n) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y) dy \right) \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x-y) \frac{e^{-in(x-y)}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) g(y) \frac{e^{-iny}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= a_n b_n.
\end{aligned}
$$

解答 5.4. (1), (2) 共に $f \not\equiv 0$ ではないとしておく.
(1) f は周期函数であったことに注意すると部分積分により $(\triangle f, f) = -\|f'\|_2^2$ となるので

$$\lambda \|f\|_2^2 = \|f'\|_2^2 .$$

ここで $f \not\equiv 0$ より $\|f\|_2 > 0$ なので $\lambda \in [0, +\infty)$ を得る.
(2) 十分性は明らかなので必要性のみを示す. また $\lambda = 0$ のときは明らかなので以下では $\lambda \neq 0$ とする.
　まず $f'' = -\lambda f$ の解は

$$f = c_+ e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_- e^{-\sqrt{-\lambda} x}$$

となる. ここで $f \in C^\infty(S^1)$ であるので

$$f(0) = f(2\pi), \ f'(0) = f'(2\pi).$$

つまり

$$c_+ + c_- = c_+ e^{2\pi\sqrt{-\lambda}} + c_- e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}},\ c_+\sqrt{-\lambda} - c_-\sqrt{-\lambda} = c_+\sqrt{-\lambda}e^{2\pi\sqrt{-\lambda}} - c_-\sqrt{-\lambda}e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}$$

であるが, $\lambda \neq 0$ としていたのでこれらより

$$c_+ = c_+ e^{2\pi\sqrt{-\lambda}},\ c_- = c_- e^{-2\pi\sqrt{-\lambda}}$$

となる. ここで $f \not\equiv 0$ であったので $(c_+, c_-) \neq (0,0)$ であることに注意するとこれらより $e^{2\pi\sqrt{-\lambda}} = 1$. よって $n \in \{1, 2, \cdots\}$ が存在し $\lambda = n^2$ と表され, $\varphi_{\pm n}$ の定義に注意すると必要性が示される.

(3)　まず $u_0 \in L^2(S^1) \subset L^1(S^1)$ であるので

$$|(u_0, \varphi_n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u_0\|_1 < +\infty$$

となることを用いると演習 1.3. の証明と同様にして $u(x,t)$ は $S^1 \times (0, +\infty)$ 上で C^2 級であり, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすことは示される (演習 1.4. も参照せよ).

次に $t \downarrow 0$ で $\|u_0 - u_t\|_2 \to 0$ を示す. まず $u_t \in C^2(S^1) \subset L^2(S^1)$ ということに注意する. $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(S^1)$ の完全正規直交系であるので Parseval の等式を用いれば

$$\begin{aligned}\|u_0 - u_t\|_2^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(u_0 - u_t, \varphi_n)|^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(u_0, \varphi_n)|^2 (1 - e^{-n^2 t})^2\end{aligned}$$

となり, $u_0 \in L^2(S^1)$ であったので Parseval の等式より

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(u_0, \varphi_n)|^2 = \|u_0\|_2^2 < +\infty$$

が成り立つので Lebesgue の収束定理から主張を得る.