解析学 II 演習 6 解答

解答 6.1.　最初に

$$1 = \frac{1}{2N\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt \tag{1}$$

となることに注意する．

任意に $\varepsilon > 0$ をとる．f は x で連続なので，$\delta > 0$ が存在して

$$|y| < \delta \Longrightarrow |f(x+y) - f(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

をみたす．(1) より

$$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2N\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt$$

が成り立つので，$\frac{1-\cos(Ny)}{1-\cos y} \geq 0$ に注意すれば

$$\begin{aligned}|\sigma_N(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2N\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt \\ &= \frac{1}{2N\pi}\int_{|t|<\delta}|f(x+t)-f(x)|\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt \\ &\quad + \frac{1}{2N\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|f(x+t)-f(x)|\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt.\end{aligned}$$

(1), (2) より，第 1 項は

$$\frac{1}{2N\pi}\int_{|t|<\delta}|f(x+t)-f(x)|\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2N\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt = \varepsilon$$

と評価できる．また，第 2 項に対しては

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2N\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}|f(x+t)-f(x)|\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt \\ &\qquad \leq \frac{1}{N\pi(1-\cos\delta)}\int_{-\pi}^{\pi}(|f(x+t)|+|f(x)|)\,dt \\ &\qquad = \frac{1}{N\pi(1-\cos\delta)}(\|f\|_1 + 2\pi|f(x)|),\end{aligned}$$

が成り立つ．

以上をあわせて，

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{1}{N\pi(1-\cos\delta)}(\|f\|_1 + 2\pi|f(x)|)$$

を得る．$N \to \infty$ とすれば

$$\limsup_{N\to\infty} |\sigma_N(f)(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

となるが，$\varepsilon > 0$ は任意だったので，結局

$$\lim_{N\to\infty} |\sigma_N(f)(x) - f(x)| = 0$$

である．

解答 6.2. $\cos$ が偶関数であるから，(1) より

$$1 = \frac{1}{N\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt = \frac{1}{N\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt$$

を得る．これより

$$\begin{aligned}
&\sigma_N(f)(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \\
&\quad = \frac{1}{2N\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt \\
&\qquad - \frac{1}{2N\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt - \frac{1}{2N\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+0)\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt
\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_N(f)(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| \\
&\quad \le \frac{1}{2N\pi}\int_{-\pi}^{0} |f(x+t)-f(x-0)|\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt \\
&\qquad + \frac{1}{2N\pi}\int_{0}^{\pi} |f(x+t)-f(x+0)|\frac{1-\cos(Nt)}{1-\cos t}\,dt
\end{aligned}$$

である．後は，演習 6.1. と同様に評価すればよい．

解答 6.3. 演習 6.4. で $k = 3$ とおけばよい．

解答 6.4. $F_n(f^{(k)}) = (in)^k F_n(f)$ より，$n \neq 0$ に対して

$$|F_n(f)| = \frac{|F_n(f^{(k)})|}{|n|^k} \le \frac{\|f^{(k)}\|_1}{2\pi}\frac{1}{|n|^k}$$

となるから，任意の $x \in S^1$ と自然数 M, N $(N < M)$ に対して

$$|S_M(f)(x) - S_N(f)(x)| = \left|\sum_{N<|n|\le M} F_n(f)e^{inx}\right| \le \sum_{N<|n|\le M} \frac{\|f^{(k)}\|_1}{2\pi}\frac{1}{|n|^k}$$

が成り立つ．ここで

$$\sum_{N<|n|\le M}\frac{1}{|n|^k}<2\int_N^\infty\frac{dx}{x^k}=\frac{2}{k-1}\frac{1}{N^{k-1}}$$

を用いると，$M>N$ のとき

$$\|S_M(f)-S_N(f)\|_\infty\le\frac{\|f^{(k)}\|}{(k-1)\pi}\frac{1}{N^{k-1}} \tag{3}$$

となる．よって $\{S_M(f)\}_{M=0}^\infty$ は $C^0(S^1)$ における Cauchy 列であり，$S_M(f)$ はある $g\in C^0(S^1)$ に一様収束する．一方，$\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}$ が $L^2(S^1)$ の完全正規直交系であるから $S_M(f)$ は f に L^2 収束する．したがって a.e. $x\in S^1$ で $f(x)=g(x)$ となるが，$f,g\in C^0(S^1)$ より $g=f$ である．よって $S_M(f)$ は f に一様収束し，(3) において $M\to\infty$ とすることにより

$$\|f-S_N(f)\|_\infty\le\frac{\|f^{(k)}\|_1}{(k-1)\pi}\frac{1}{N^{k-1}}$$

を得る．