解析学 2 演習 7　　　　　　　　担当　木上

演習 7.1. $\Omega = \{\mu | \mu$ は S^1 上の Borel 正則な測度$, \mu(S^1) = 1\}$ とする。$\mu \in \Omega, n \in \mathbb{Z}$ に対して $F_n(\mu)$ を次の式で定義する。

$$F_n(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mu$$

(1)　$f \in C^1(S^1)$ に対して、次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^{2\pi} f d\mu = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n(f)F_{-n}(\mu)$$

[ヒント：$f_N(x) = \sum_{|n|\le N} F_n(f)e^{inx}$ とするとき、$\int_0^{2\pi} f_N d\mu$ は?]
(2)　$\mu, \nu \in \Omega$ とする。任意の $n \in \mathbb{Z}$ で $F_n(\mu) = F_n(\nu)$ ならば任意の Borel 集合 A に対して $\mu(A) = \nu(A)$ であることを示せ。

演習 7.2. $C_*(S^1) = \{g | g \in C^0(S^1), \sum_{n\in\mathbb{Z}} |F_n(g)| < +\infty\}$ とする。
(1)　$a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$ とする。任意の $g \in C_*(S^1)$ に対して、

$$a\frac{d^2 f}{dx^2} + b\frac{df}{dx} + cf = g$$

をみたす $f \in C^2(S^1)$ がただ一つ存在するための必要十分条件は「$-ax^2 + bix + c = 0$ が整数解をもたない。」であることを示せ。
[ヒント：$F_n(af'' + bf' + c) = (-n^2 a + ibn + c)F_n(f)$]
(2)　$g \in C_*(S^1)$ に対して、

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + f = g$$

をみたす $f \in C^2(S^1)$ が存在するための必要十分条件は $F_1(g) = 0$ であることを示せ。

演習 7.3. $T^2 = S^1 \times S^1$ とする。$N \ge 1$ に対して $D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$ とするとき以下の問いに答えよ。
(1)　$f \in C^2(T^2)$ に対して、

$$T_N(f)(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t, y-s)D_N(t)D_N(s)dsdt$$

とおく。T^2 上 $T_N(f)$ は $N \to \infty$ で f に一様収束することを示せ。
(2)　$\psi_{n,m}(x,y) = (2\pi)^{-1}e^{inx+imy}$ とおく。このとき、$(\psi_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(T^2, dxdy)$ の完全正規直交系であることを示せ。