解析学 2 演習 8　　　　　　担当　木上

演習 8.1. $f(x) = e^{-x^2}$ とおく。

(1)　任意の多項式 $P(x)$ に対して $\lim_{x\to\infty} P(x)f(x) = 0$ を示せ。

(2)　$n \geq 0$ とする。ある多項式 $P_n(x)$ があって、$f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ を示せ。ただし $f^{(n)}$ は f の n 階微分である。

(3)　任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を示せ。

演習 8.2. f, g を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測な関数で、$f(x-y)g(y)$ が y の関数として可積分であるとする。このとき $f(y)g(x-y)$ も y の関数として可積分であり、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy$$

が成り立つことを示せ。
[ヒント：f, g が共に単関数の場合に示し、一般の場合は単関数近似を用いる。]

演習 8.3.

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| \geq 1) \end{cases}$$

とすると $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ を示せ。

演習 8.4. 次の (1), (2) に対して正しければ証明し、間違っていれば反例をあげよ。

(1)　$f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{S}$ ならば $f * g \in \mathcal{S}$.

(2)　$f \in C_c(\mathbb{R}), g \in \mathcal{S}$ ならば $f * g \in \mathcal{S}$.