解析学2 演習8 解答

<u>解答 **8.1.**</u>
(1)　$P(x)=0$ の場合は明らか．$P(x)\neq 0$ とし，$N=\deg(P)$ とする．$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ より，

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\geq\sum_{n=0}^{N+1}\frac{x^{2n}}{n!}$$

であるから，

$$|P(x)f(x)|=\frac{P(x)}{e^{x^2}}\leq\frac{P(x)}{\sum_{n=0}^{N+1}\frac{x^{2n}}{n!}}\to 0$$

(2)　n に燗する数学的帰納法により示す．
　$n=0$ の場合は明らか．
　$n=1$ の場合，$f'(x)=-2xe^{-x^2}=-2xf(x)$ なのでよい．
　$n=k$ のとき，$f^{(k)}(x)=P_k(x)f(x)$ とすると，

$$f^{(k+1)}(x)=P_k'(x)f(x)+P_k(x)f'(x)=\left(P_k'(x)-2xP_k(x)\right)f(x)$$

となり，$n=k+1$ でも成立することが分かる．
(3)　$n=1$ のときを示す．任意の $i,j\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^i e^{-x^2}\right||x|^j=\left|P_i(x)x^j\right|e^{-x^2}\to 0\quad(x\to\pm\infty)$$

なので，$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^i e^{-x^2}\right||x|^j<\infty$ である．i,j は任意なので，$e^{-x^2}\in\mathcal{S}$ である．
　$n\geq 2$ のときも同様.

<u>解答 **8.2.**</u>　1 次元 Lebesgue 測度を μ で表す.
　次の事実に注意する；Lebesgue 測度は平行移動不変 (すなわち，$A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と $x\in\mathbb{R}$ に対し $\mu(A+x)=\mu(A)$) であり，反転不変 ($\mu(A)=\mu(-A)$) である．(ちなみに，$\mathbb{R}$ 上の平行移動不変な測度 ν で，任意のコンパクト集合 $K\subset\mathbb{R}$ に対し $\nu(K)<\infty$ となるものは Lebesgue 測度の定数倍，ということもわかる)
　まず，$f=\chi_A, g=\chi_B$ $(A,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ の場合に問題の等式を示す．このとき，

$$f(x-y)g(y)=\chi_A(x-y)\chi_B(y)=\chi_{-A+x}(y)\chi_B(y)=\chi_{(-A+x)\cap B}(y)$$
$$f(y)g(x-y)=\chi_A(y)\chi_B(x-y)=\chi_A(y)\chi_{-B+x}(y)=\chi_{A\cap(-B+x)}(y)$$

なので，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy &= \mu((-A+x)\cap B) \\
&= \mu((-A)\cap(B-x)) \\
&= \mu(A\cap(-B+x)) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy
\end{aligned}
$$

となり，求める式をえる．ただし，2 行目で Lebesgue 測度の平行移動不変性を，3 行目で Lebesgue 測度の反転不変性を用いた．

次に，f,g が単函数の場合を示す．$f = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}, g = \sum_{j=1}^n b_j\chi_{B_j}$ $(a_i, b_j \geq 0, A_i, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $(i,j=1,\cdots,n))$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ib_j\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{A_i}(x-y)\chi_{B_j}(y)\,dy \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ib_j\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{A_i}(y)\chi_{B_j}(x-y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy
\end{aligned}
$$

となり，求める式をえる．

f,g が $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測な非負値函数の場合は非負単函数列 $\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}, \{g_n\}_{n=1,2,\cdots}$ で，$f_n \uparrow f, g_n \uparrow g$ $(n\to\infty)$ となるものが存在する．単調収束定理により，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-y)g_n(y)\,dy \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)g_n(x-y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy
\end{aligned}
$$

となり，求める式を得る．ただし，2 行目で単函数の場合の結果を用いた．

一般の場合は，非負値函数の場合の結果により，

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)g(x-y)|\,dy
$$

となるが，仮定より左辺は有限なので，右辺も有限．したがって，$f(y)g(x-y)$ が y の函数として可積分であることがわかる．あとは $f=f_+-f_-, g=g_+-g_-$ と分解して計算すればよい．

<u>解答</u> **<u>8.3.</u>** 関数 $f\in C(\mathbb{R})$ を

$$
f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0) \end{cases}
$$

と定義すると，関数 ψ は $\psi(x)=f(1-x^2)$ と書かれる．よって $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ であることを示せば，$\mathrm{supp}\psi=\{x\mid |x|\le 1\}$ より $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ が従う．

　すべての整数 $n\ge 0$ に対して $f\in C^n(\mathbb{R})$ であり，かつ

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$

であることを示す．ただし P_n は $P_0(t)=1$, $P_{n+1}(t)=t^2[P_n(t)-P_n'(t)]$, $(n\ge 0)$ により定義される多項式関数である．$x\neq 0$ での成立はすぐに分かるから $x=0$ における微分可能性を示す．$x=0$ において f が連続で

$$\lim_{x\uparrow -0}f^{(1)}(x)=\lim_{x\downarrow +0}f^{(1)}(x)=0$$

が成り立つから，f は $x=0$ においても微分可能で微係数は $f^{(1)}(0)=0$ である．よって $f\in C^1(\mathbb{R})$ が示された．n に関する数学的帰納法により $f^{(n)}(0)=0$ を示すことも同様に行われる．

解答 8.4.

(1)　正しくない：反例を示す．$f=\frac{1}{1+x^2}$ とすれば $f\in C^\infty(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$．演習 7.3. より $g=\psi$ とすれば $g\in\mathcal{S}$ である．このとき

$$\begin{aligned}f*g(x)&=\int_{|y|\le 1}\frac{1}{1+(x-y)^2}\psi(y)dy\\&\ge\frac{1}{1+\max\{(x-1)^2,(x+1)^2\}}\int\psi(y)dy\end{aligned}$$

$\int\psi(y)dy>0$ であるから，$x\to\infty$ のとき $|x^3\cdot f*g(x)|\to\infty$ となる．従って $f*g\notin\mathcal{S}$.

(2)　正しい：$f\in C_c(\mathbb{R})\subset L^1(\mathbb{R})$ と $g\in\mathcal{S}$ より，任意の整数 m,n に対して，

$$\left|x^m\cdot\frac{\partial^n}{\partial x^n}f*g(x)\right|\le\int_{\mathrm{supp}(f)}|f(y)|\cdot|x^m|\cdot\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}g(x-y)\right|dy$$

が成り立つ．$\mathrm{supp}(f)$ はコンパクトなので，この上で $|x|^m\le P(y-x)$ を満すような多項式 P が存在する．$g\in\mathcal{S}$ より $|P(x-y)|\cdot\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}g(x-y)\right|\le M$ となるような定数が存在するので，$|x|^m\cdot|D_x^n f*g(x)|\le M\|f\|_1$ が成り立つ．従って $f*g\in\mathcal{S}$.