解析学 2 演習 9　　　　　　担当　木上

演習 9.1. $\mathbb{R}$ 上定義された次の関数の Fourier 変換を求めよ。
(1)　$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$
(2)　$f(x) = e^{-t|x|}$　（ただし $t > 0$)
(3)　$f(x) = xe^{-tx^2}$　（ただし $t > 0$)

演習 9.2. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ と定義する。このとき $(\mathcal{F}f^*)(x) = \overline{(\mathcal{F}f)(x)}$ を示せ。

演習 9.3. (1)　$a > 0$ に対して $f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ を $f_a(x) = e^{-a|x|^2}$ と定義する。このとき $f_a * f_b$ を求めよ。
(2)　$t > 0$ に対して $k_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ を $k_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}e^{-|x|^2/(4t)}$ と定義する。このとき任意の $t_1, t_2 > 0$ に対して $k_{t_1} * k_{t_2} = k_{t_1+t_2}$ を示せ。
(3)　$p \in [1, \infty)$ とする。任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$、任意の $t > 0$、任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、$u(t, x) = (f * k_t)(x)$ とし、$u_t(x) = u(t, x)$ と定義する。このとき、$u(t, x)$ は任意の $t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ で t に関しては C^1 級、x に関しては C^2 級で

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2}$$

をみたし $t \downarrow 0$ で $||u_t - f||_p \to 0$ となることを示せ。

$p \in [1, \infty)$ とする。$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $T_t f = f * k_t$ と定義すると T_t は $L^p(\mathbb{R}^n)$ からそれ自身への有界線型作用素となり、任意の $t > 0, s > 0$ に対して

$$T_t T_s = T_{t+s}, \tag{1}$$

T_0 を恒等写像とすれば任意の $t \geq 0$, 任意の $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$||T_t f||_p \leq ||f||_p, \tag{2}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} ||T_{t+h} f - T_t f||_p = 0 \tag{3}$$

が成り立つ。一般に Banach 空間からそれ自身への有界線型作用素の族 $\{T_t\}_{t>0}$ が (1) の性質を持つとき $\{T_t\}_{t>0}$ は有界線型作用素の semigroup であるという。さらに有界線型作用素の semigroup に対して (2) の性質を縮小性（contraction）、(3) の性質を強連続性（strong continuity）という。つまり $T_t f = f * k_t$ で与えられる $\{T_t\}_{t>0}$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上の stong continuous contraction semigroup になっている。さらに $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2/\partial {x_j}^2$ とおき、$U : [0, +\infty) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ を $U(t) = T_t f$ と定義すると 8.3-(3) の結果より $U'(t) = \Delta U(t)$ をみたす。このことから $T_t = e^{t\Delta}$ と書くこともある。