解析学 II 演習 9 解答

解答 9.1.

(1) $(\mathcal{F}f)(0) = \sqrt{2/\pi}$ は明らか．$\xi \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-1}{i\xi}e^{-i\xi x}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{i\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\xi}{\xi}\end{aligned}$$

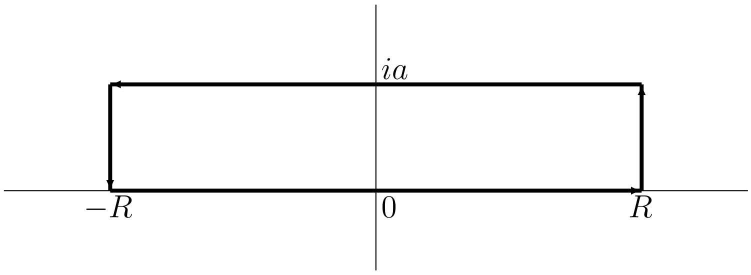
(2)

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t|x|-i\xi x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-tx-i\xi x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{tx-i\xi x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{-e^{-tx-i\xi x}}{t+i\xi}\right]_{0}^{\infty} + \left[\frac{e^{tx-i\xi x}}{t-i\xi}\right]_{-\infty}^{0}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{t+i\xi}+\frac{1}{t-i\xi}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{t}{t^2+\xi^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-tx^2-i\xi x}dx \\ &= \frac{e^{-\xi^2/4t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(\sqrt{t}x+\frac{i\xi}{2\sqrt{t}})^2}dx \\ &= \frac{e^{-\xi^2/4t}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x'+\frac{i\xi}{2\sqrt{t}}-\frac{i\xi}{2\sqrt{t}}\right)e^{-(x'+\frac{i\xi}{2\sqrt{t}})^2}dx' \qquad (x'=\sqrt{t}x) \\ &= \frac{e^{-\xi^2/4t}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t}\left(\left[\frac{-1}{2}e^{-(x'+\frac{i\xi}{2\sqrt{t}})^2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\xi}{2\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x'+\frac{i\xi}{2\sqrt{t}})^2}dx'\right) \\ &= \frac{-i\xi}{\sqrt{\pi}(2t)^{3/2}}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x'+\frac{i\xi}{2\sqrt{t}})^2}dx' = \frac{-i\xi}{(2t)^{3/2}}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\end{aligned}$$

最後の等号で，任意の実数 a に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+ia)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ が成り立つことを用いた．(このことは Cauchy の積分定理を用いて容易に示される．e^{-z^2} を以下の経路上で積分し，$R\to\infty$ の極限を考えよ．なお，解析接続を利用した証明もある.)



解答 9.2.

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}f^*)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(-y)}e^{-ix\cdot y}dy = \overline{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(-y)e^{ix\cdot y}dy} \\
&= \overline{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)e^{-ix\cdot y}dy} = \overline{(\mathcal{F}f)(x)}.
\end{aligned}
$$

解答 9.3.

(1)

$$
\begin{aligned}
f_a * f_b(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\exp(-a|y|^2)\exp(-b|x-y|^2)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-(a+b)\left|y-\frac{b}{a+b}x\right|^2-\frac{ab}{a+b}|x|^2\right)\,dy.
\end{aligned}
$$

$z = y - \frac{b}{a+b}x$ と変数変換すると,

$$
f_a * f_b(x) = \exp(-\frac{ab}{a+b}|x|^2)\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-(a+b)|z|^2\right)\,dz.
$$

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|x|^2}\,dx = (\pi/\alpha)^{n/2}$ $(\alpha > 0)$ を用いれば,

$$
f_a * f_b(x) = \left(\frac{\pi}{a+b}\right)^{n/2}\exp\left(-\frac{ab}{a+b}|x|^2\right).
$$

(2) (1) の $f_a(x)$ を使って $k_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}f_{1/(4t)}(x)$ と表せることと (1) より結論が従う.

(3) <u>微分方程式を満たすこと</u>: $0 < a < b < \infty$ を満たす a, b を任意に固定する. $\forall t \in (a, b)$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$
\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x-y)k_t(y)\right| = |f(x-y)|\left|\frac{|y|^2}{4t^2}-\frac{n}{2t}\right|k_t(y) \le |f(x-y)|\left(\frac{|y|^2}{4a^2}+\frac{n}{2a}\right)\frac{1}{(4\pi a)^{n/2}}\exp(-\frac{|y|^2}{4b}).
$$

右辺は t によらない (y に関する) 可積分函数ゆえ, (補足の事実から) 積分と微分の順序交換が可能であり

$$
\partial_t(k_t * f) = (\partial_t k_t) * f
$$

が成り立つ．a, bは任意であったから$k_t * f$は$t > 0$でC^1級である．xについても同様に$\Delta_x(k_t * f) = (\Delta_x k_t) * f$が成り立つ．$\partial_t k_t - \Delta_x k_t = 0$ より，$\partial_t(k_t * f) - \Delta_x(k_t * f) = (\partial_t k_t - \Delta_x k_t) * f = 0$であり，問題の方程式を満たす．

<u>$\|u_t - f\|_p \to 0\ (t \to 0)$ の証明</u>：　以下 $C_{0,+} := \{g \in C(\mathbb{R}^n) \mid g \geq 0$ で台がコンパクト $\}$，$L^p := L^p(\mathbb{R}^n)$，$L^p_+ := \{f \in L^p \mid f \geq 0\}$ とおく．まず $f \in L^p$ に対して縮小性，すなわち $\|k_t * f\|_p \leq \|f\|_p$ が成り立つことを示す．$p \in (1, \infty)$ のとき，$1/p + 1/q = 1$ となる q をとると Hölder の不等式から

$$
\begin{aligned}
|(k_t * f)(x)|^p &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| k_t(x-y)^{1/p} k_t(x-y)^{1/q}\, dy \right)^p \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p k_t(x-y)\, dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} k_t(x-y)\, dy \right)^{p/q} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p k_t(x-y)\, dy
\end{aligned}
$$

が成り立つので，Fubini の定理より

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(k_t * f)(x)|^p\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p k_t(x-y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p k_t(x-y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\, dy
\end{aligned}
$$

が従う．$p = 1$ のときも成り立つことは明らか．

さて，$\forall f \in L^p_+$ に対して題意が成り立つことを示せばよいが，さらに縮小性より，$\forall g \in C_{0,+}$ に対して示せば十分である．なぜなら，$C_{0,+}$ は L^p_+ で稠密なので $\forall f \in L^p_+$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\|f - g\|_p < \varepsilon$ となる $g \in C_{0,+}$ が存在するが，このとき

$$
\begin{aligned}
\|k_t * f - f\|_p &\leq \|k_t * f - k_t * g\|_p + \|k_t * g - g\|_p + \|g - f\|_p \\
&< 2\varepsilon + \|k_t * g - g\|_p
\end{aligned}
$$

が成り立つからである．

そこで $g \in C_{0,+}$ とする．任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$
(k_t * g)(x) = (\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - 2\sqrt{t}y) e^{-|y|^2}\, dy
$$

であり，$|g(x - 2\sqrt{t}y)e^{-|y|^2}| \leq \|g\|_\infty e^{-|y|^2}$ が成り立つので，Lebesgue の収束定理より

$$
\lim_{t \to 0} (k_t * g)(x) = (\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-|y|^2}\, dy = g(x),
$$

すなわち各点収束している．また，g と k_t は非負値なので Fubini の定理より

$$
\int_{\mathbb{R}^n} (k_t * g)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \qquad (\forall t > 0).
$$

以上より，まず $p=1$ に対して，$(g-k_t*g)_+(x)\le g(x)$ と Lebesgue の収束定理から

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\|g-k_t*g\|_1 &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)-k_t*g(x)|dx \\
&= 2\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}(g(x)-k_t*g(x))_+dx-\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}(g(x)-k_t*g(x))dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

が従う．一般の $p\in(1,\infty)$ に対しては，r を $r>p$ となるようにとり，さらに α を $p=\alpha+(1-\alpha)r$ となるようにとると (このとき $0<\alpha<1$)，Hölder の不等式から

$$
\begin{aligned}
\|g-k_t*g\|_p^p &= \||g-k_t*g|^p\|_1 \\
&\le \||g-k_t*g|^\alpha\|_{1/\alpha}\cdot\||g-k_t*g|^{(1-\alpha)r}\|_{1/(1-\alpha)} \\
&= \|g-k_t*g\|_1^\alpha\|g-k_t*g\|_r^{(1-\alpha)r}
\end{aligned}
$$

を得るので，$L^1(\mathbb{R}^n)$ での強連続性と $L^r(\mathbb{R}^n)$ での縮小性から結論が従う．

補足：　(2) より L^p 上の線型作用素 $T_t f := k_t * f$ は半群になることがわかる．(3) の証明中で示したように，T_t は縮小的であり (従って当然有界でもある)，これと (3) の結論から T_t の強連続性が従う．

(3) の証明中，$T_t f$ の t に関する微分可能性を示すには次の事実を用いる．

定理 (積分記号下の微分)　$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし，$-\infty < a < b < \infty$ とする．$f : X \times (a, b) \to \mathbb{R}^n$ は $\forall t \in (a, b)$ に対して $f(\cdot, t) \in L^1$ であり，$\partial f / \partial t$ が存在する (偏微分可能) ものとする．さらに

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x), \qquad \forall x, \forall t \in (a, b)$$

を満たす (t に依らない)$g \in L^1$ が存在するならば，$\int_X f(x, t) \mu(dx)$ は $t \in (a, b)$ で微分可能で

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_X f(x, t) \mu(dx) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \mu(dx)$$

が成り立つ．

Proof. 十分小さい $h \neq 0$ に対して

$$\frac{1}{h} \left(\int_X f(x, t+h) \mu(dx) - \int_X f(x, t) \mu(dx) \right) = \int_X \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) ds \, \mu(dx)$$

であり，仮定から

$$\left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) ds \right| \leq \sup_{t \in (a,b)} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) \right| \leq g(x)$$

なので，Lebesgue の収束定理から

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_X f(x, t+h) \mu(dx) - \int_X f(x, t) \mu(dx) \right) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \mu(dx). \quad \square$$