微分方程式

木上　淳
京都大学大学院情報学研究科
e-mail：kigami@i.kyoto-u.ac.jp

July 19, 2012

Contents

Chapter 1

常微分方程式の基礎

§1.1　常微分方程式とは

常微分方程式（ordinary differential equation, ODE）

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad \text{微分方程式}$$
$$x(0) = x_0 \qquad \text{初期値}$$

さらに正確には、
U を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$a, b \in \mathbb{R}, a < b$ に対して $f : (a,b) \times U \to \mathbb{R}^n$ で

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

と書けるとする。

定義 1.1.1. $a \leq \alpha < \beta \leq b$ とし、$X = (X_1, \ldots, X_n) : (\alpha, \beta) \to U$ が微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1.1.1}$$

の (α, β) 上の解であるとは、任意の $t \in (\alpha, \beta)$ と任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して $X_i(t)$ は (α, β) 上微分可能であって、

$$\frac{dX_i}{dt}(t) = f_i(t, X_1(t), \ldots, X_n(t))$$

が成り立つことである。$t_0 \in (a,b)$, $\alpha < t_0 < \beta$ のとき、$X : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n$ が微分方程式 (1.1.1) の $t = t_0$ で 初期値 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ の解であるとは、X が (1.1.1) の (α,β) 上の解であり $X(t_0) = X_0$ を満たすこと。

$a < \alpha < \beta < b$ のとき $X : [\alpha,\beta] \to U$ が (1.1.1) の $[\alpha,\beta]$ 上の解であるとは、(α,β) 上の解であって、α,β においてはそれぞれ

$$\frac{dX}{dt^+}(\alpha) = f(\alpha, X(\alpha)),$$
$$\frac{dX}{dt^-}(\beta) = f(\beta, X(\beta))$$

が成り立つことである。ただし

$$\frac{dX}{dt^+}(\alpha) = \lim_{t\downarrow\alpha} \frac{X(t)-X(\alpha)}{t-\alpha} \quad \text{は } X \text{ の } \alpha \text{ における右微分}$$
$$\frac{dX}{dt^-}(\beta) = \lim_{t\uparrow\beta} \frac{X(t)-X(\beta)}{t-\beta} \quad \text{は } X \text{ の } \beta \text{ における左微分}$$

$f(t,x)$ が t によらないとき、微分方程式 (1.1.1) は自励系（autonomous system）であるという。

命題 1.1.2. 微分方程式 (1.1.1) は自励系であるとする。いま $X : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ が (1.1.1) の (a,b) 上の解ならば、$T \in \mathbb{R}$ に対して $X_T(t) = X(t-T)$ とおくと X_T は (1.1.1) の $(a+T, b+T)$ 上の解である。

$f(t,x)$ が $(a,b) \times U$ 上で連続であるとき、微積分学の基本定理より、「$X(t)$ が (1.1.1) の t_0 で初期値 x_0 をとる (a,b) 上の解である。」は「$X(t) : (a,b) \to U$ は連続であり、任意の $t \in (a,b)$ に対して、

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds$$

が成り立つ」ことと同値である。この事実は次に述べる解の存在、一意性、初期値に関する連続性を示すのに重要となる。

記号. $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ に対して $B(x,r) = \{y | y \in \mathbb{R}^n, |x-y| < r\}$, $\overline{B}(x,r) = \{y | y \in \mathbb{R}^n, |x-y| \leq r\}$ とおく。

定義 1.1.3. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。$F : (a,b) \times U \to \mathbb{R}^n$ が U に関して compact 一様リプシッツ連続（compact uniformly Lipschitz continuous）であるとは、任意の閉区間 $I \subseteq (a,b)$ と任意の compact（有界閉集合） $K \subseteq U$ に対してある $L(I,K) > 0$ があって 任意の $t \in I$, 任意の $y, z \in K$ に対して

$$|F(t,y) - F(t,z)| \leq L(I,K)|y - z|$$

を満たすこと。

例 1.1.4. $F : (a,b) \times U \to \mathbb{R}^n$ が C^1 級なら、U に関して comact 一様リプシッツ連続である。

定理 1.1.5. U を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とし、$f : (a,b) \times U \to \mathbb{R}^n$ は連続かつ U に関して *compact* 一様リプシッツ連続とする。いま、$a < S \leq T < b$, $\epsilon > 0$, $x \in U$, $R > 0$ に対して

$$[S - \epsilon, T + \epsilon] \times \overline{B}(x, 2R) \subseteq (a,b) \times U$$

が成り立つとする。このとき

$$\begin{aligned} L &= L([S - \epsilon, T + \epsilon], \overline{B}(x, 2R)) \\ M &= \max\{|f(t,y)| : t \in [S - \epsilon, T + \epsilon], y \in \overline{B}(x, 2R)\} \end{aligned}$$

とおく。また $\delta > 0$ を

$$\delta \leq \min\left\{\epsilon, \frac{R}{\sqrt{n}M}, \frac{1}{2\sqrt{n}L}\right\} \tag{1.1.2}$$

をみたすように選ぶ。
(1) **解の存在**：任意の $(t_0, y) \in [S,T] \times \overline{B}(x,R)$ に対して t_0 で初期値 y をもつ微分方程式 (1.1.1) の $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上の解 $X : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \overline{B}(x, 2R)$ が存在する。
(2) **解の一意性**：$(t_0, y) \in [S,T] \times \overline{B}(x,R)$ とする。$X, Y : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \overline{B}(x, 2R)$ は共に微分方程式 (1.1.1) の t_0 での初期値 y の $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上の解とするとき、任意の $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ に対して $X(t) = Y(t)$ が成り立つ。
(3) **解の初期値に関する連続性**: $(t_0, y) \in [S,T] \times \overline{B}(x,R)$ とする。(1), (2) で得られた $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上の t_0 で初期値 y をとる (1.1.1) の解を $X(t : t_0, y)$ とおく。 このとき任意の $y, z \in \overline{B}(x,R)$ に対して

$$\max_{|t - t_0| \leq \delta} |X(t : t_0, y) - X(t : t_0, z)| \leq 2|y - z|$$

補題 1.1.6. $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 < a_2$ とする。$u : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}^n$ が $[a, b]$ 上で可積分であるとき、

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} u(t)dt\right| \leq \sqrt{n}\int_{a_1}^{a_2} |u(t)|dt$$

が成り立つ。ただし $u(t) = \big(u_1(t), \ldots, u_n(t)\big)$ のとき

$$\int_{a_1}^{a_2} u(t)dt = \begin{pmatrix} \int_{a_1}^{a_2} u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_{a_1}^{a_2} u_n(t)dt \end{pmatrix}$$

とおく。

証明. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i| \leq \sqrt{n}|x|.$$

より明らか。 □

定理 *1.1.5* の証明. $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ とおく。$I \subseteq [S - \epsilon, T + \epsilon]$ に注意する。
(1)

$$\mathcal{U} = \{X | X : I \to \overline{B}(x, 2R), X \text{ は連続 }\}$$

$X, Y \in \mathcal{U}$ に対して

$$||X - Y|| = \max_{t \in I}|X(t) - Y(t)|$$

とおく。さらに $y \in \overline{B}(x, R)$ に対して、

$$\mathcal{U}_y = \{X | X \in \mathcal{U}, X(t_0) = y\}$$

とおき、$X \in \mathcal{U}_y$ に対して

$$\mathcal{F}_y(X)(t) = y + \int_{t_0}^{t} f(t, X(t))dt$$

とおく。このとき、補題 1.1.6 と (1.1.2) より

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_y(X)(t)| &\leq |y| + \left|\int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds\right| \\ &\leq |y| + \sqrt{n}\left|\int_{t_0}^{t} |f(s, X(s))|ds\right| \leq |y| + \frac{\delta M}{\sqrt{n}} \leq 2R \end{aligned}$$

さらに $\mathcal{F}_y(X)(t_0) = t_0$ より $\mathcal{F}_y(X) \in \mathcal{U}_y$.
いま $X, Y \in \mathcal{U}_y$ とするとき、(1.1.2) と補題 1.1.6 より

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}_y(X)(t) - \mathcal{F}_y(Y)(t)| &\leq \sqrt{n}\left| \int_{t_0}^{t} |f(s, X(s)) - f(s, Y(s))| ds \right| \\
&\leq \sqrt{n}\left| \int_{t_0}^{t} L|X(s) - Y(s)| ds \right| \leq \sqrt{n}\delta L||X - Y|| \leq \frac{1}{2}||X - Y|| \quad (1.1.3)
\end{aligned}
$$

従って

$$||\mathcal{F}_y(X) - \mathcal{F}_y(Y)|| \leq \frac{1}{2}||X - Y||. \quad (1.1.4)$$

さて、任意の $t \in I$ に対して $X_0(t) = y$ とする。$X_0 \in \mathcal{U}_y$ である。ここで $k \geq 1$ に対して $X_k \in \mathcal{U}$ を帰納的に $X_{k+1} = \mathcal{F}_y(X_k)$ で定義する。このとき、(1.1.4) より $||X_{k+1} - X_k|| \leq 2^{-k}||X_1 - X_0||$. 各 $t \in I$ に対して、$k \geq m \geq 0$ なら

$$
\begin{aligned}
|X_k(t) - X_m(t)| \leq ||X_k - X_m|| &\leq \sum_{i=m}^{k-1} ||X_{i+1} - X_i|| \\
&\leq \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}||X_1 - X_0|| = 2^{-(m-1)}||X_1 - X_0|| \quad (1.1.5)
\end{aligned}
$$

従って $\{X_k(t)\}_{t\geq 0}$ は Cauchy 列となり $k \to \infty$ で収束する。$X(t) = \lim_{k\to\infty} X_k(t)$ とおくとき (1.1.5) で $k \to \infty$ とすると、

$$|X(t) - X_m(t)| \leq 2^{-(m-1)}||X_1 - X_0||$$

任意の $t \in [-T, T]$ で上の式が成り立つので I 上 X_m は X に $m \to \infty$ で一様収束する。従って X は連続であり $X \in \mathcal{U}_y$.

次に $s \in I$ に対して $F_k(s) = f(s, X_k(s))$, $F(s) = f(s, X(s))$ と定義すると、

$$|F_k(s) - F(s)| \leq L|X_k(s) - X(s)| \leq 2^{-(k-1)}L||X_1 - X_0||$$

従って I 上 $k \to \infty$ で F_k は F に一様収束する。ここで、

$$X_{k+1}(t) = y + \int_{t_0}^{t} F_k(s) ds$$

である。$k \to \infty$ とすれば

$$X(t) = y + \int_{t_0}^{t} F(s)ds = y + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))ds$$

従って $t \in I$ で $X(t)$ は微分可能であり $X'(t) = f(t, X(t))$.
(2) $X, Y \in \mathcal{U}_y$ であり $\mathcal{F}_y(X) = X, \mathcal{F}_y(Y) = Y$ が成り立つ。(1.1.4) より

$$||X - Y|| = ||\mathcal{F}_y(X) - \mathcal{F}_y(Y)|| \leq \frac{1}{2}||X - Y||$$

よって $||X - Y|| = 0$. すなわち $X = Y$.
(3) $Y(t) = X(t : t_0, y), Z(t) = X(t : t_0, z)$ とする。$t \in I$ に対して (1.1.2) と補題 1.1.6 より

$$\begin{aligned}|Y(t) - Z(t)| &= |\mathcal{F}_y(Y)(t) - \mathcal{F}_z(Z)(t)| \\ &\leq |y - z| + \sqrt{n}\Big|\int_{t_0}^{t} |f(s, Y(s)) - f(s, Z(s))|ds\Big| \\ &\leq |y - z| + \sqrt{n}\delta L||Y - Z|| \leq |y - z| + \frac{1}{2}||Y - Z||\end{aligned}$$

よって

$$||Y - Z|| \leq |y - z| + \frac{1}{2}||Y - Z||.$$

□

系 1.1.7. U を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とし、$f : (a, b) \times U \to \mathbb{R}^n$ は連続かつ U に関して *compact* 一様リプシッツ連続とする。このとき、
(1) **解の存在**: 任意の $(t_0, x_0) \in (a, b) \times U$ に対してある $\delta > 0$ と $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ 上で t_0 での初期値 x_0 をもつ微分方程式 (1.1.1) の解が存在する。
(2) **解の一意性** 微分方程式 (1.1.1) の (α_1, β_1) での解 $X(t)$ と (α_1, β_2) 上での解 $Y(t)$ があって、ある $t_* \in (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$ で $X(t_*) = Y(t_*)$ ならば、任意の $t \in (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$ で $X(t) = Y(t)$ が成り立つ。

証明. (1) $(t_0, x_0) \in (a, b) \times U$ に対してある $\epsilon > 0$, $R > 0$ があって $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subseteq (a, b)$ かつ $\overline{B}(x_0, 2R) \subseteq U$. よって δ を定理 1.1.5 のように選べば定理 1.1.5 - (1) より解の存在がわかる。
(2) $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2)$ とおく。$I_1 = \{t | t \in (\alpha, \beta), X(t) = Y(t)\}$ とおく。$t_0 \in I_1$ とする。$\epsilon > 0, R > 0$ を $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subseteq (a, b)$, $\overline{B}(X(t_0), 2R) \subseteq U$ となるようにとる。このとき定理 1.1.5 で $S = T = t_0$, $x = X(t_0)$ とし、

(1.1.2) の条件をみたす $\delta > 0$ をとる。$x = X(t_0) = Y(t_0)$ より δ を十分小さく選ぶと $|t - t_0| \leq \delta$ なら $X(t), Y(t) \in \overline{B}(x, 2R)$ となるようにできる。定理 1.1.5-(2) より $X(t) = Y(t)$ が任意の $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ で成りたつ。以上の議論より I_1 は開集合。$I_2 = \{t | t \in (\alpha, \beta), X(t) \neq Y(t)\}$ とおくと $X(t), Y(t)$ は連続より I_2 も開集合。いま $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $(\alpha, \beta) = I_1 \cup I_2$ であり (α, β) は連結なので $I_1 = \emptyset$ または $I_2 = \emptyset$. $I_1 \neq \emptyset$ なので $I_2 = \emptyset$ で $(\alpha, \beta) = I_1$. □

定理 1.1.8 (解の延長). U を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$a, b \in \mathbb{R}, a < b$ とし、$f : (a, b) \times U \to \mathbb{R}^n$ は連続かつ U に関して *compact* 一様リプシッツ連続とする。任意の $(t_0, x_0) \in (a, b) \times U$ に対して、$a \leq \alpha < t_0 < \beta \leq b$ をみたす α, β と t_0 で初期値 x_0 をとる (α, β) 上の (1.1.1) の解 $X(t)$ で
「Y が t_0 で初期値 x_0 をとる (t_1, t_2) 上の (1.1.1) の解ならば $\alpha \leq t_1, t_2 \leq \beta$ であり $Y(t) = X(t)$ が任意の $t \in (t_1, t_2)$ で成り立つ。」
を満たすものがある。さらに $\beta < b$ ならば U の *compact* な部分集合 K に対して、ある $t_* \in (t_0, \beta)$ があって $t \in (t_*, \beta)$ では $X(t) \notin K$ となる。

証明. 系 1.1.7 より t_0 で初期値 x_0 をとる (α_1, β_1) 上の解と (α_2, β_2) 上の解をつなげることで、$(\alpha_1, \beta_1) \cup (\alpha_2, \beta_2)$ 上の解を作ることができる。従って、

$$(\alpha, \beta) = \bigcup \{(\alpha_*, \beta_*) |\ t_0 \text{ で初期値 } x_0 \text{ をとる } (\alpha_*, \beta_*) \text{ 上の解が存在する。}\}$$

とおけば t_0 で初期値 x_0 をとる (α, β) 上の解が存在し定理の条件をみたす。

残りの部分は背理法で示す。$\beta < b$ とする。U の compact 部分集合 K に対して、単調増大な数列 $\{t_m\}_{m \geq 1}$ があって $m \to \infty$ で $t_m \uparrow \beta$ であり $X(t_m) \in K$ が任意の m で成り立つとする。（すなわち定理の結論を否定する。）K は compact より $\{t_k\}_{k \geq 1}$ の部分列 $\{s_m\}_{m \geq 1}$ で $m \to \infty$ で $s_m \uparrow \beta$ ある $x_* \in K$ に対して $X(s_m) \to x_*$ となるものがある。ここで $T = \beta$ とし

- S, ϵ を $\epsilon > 0$, $[S - \epsilon, T + \epsilon] \subseteq (a, b)$ となるように
- $R > 0$ を $\overline{B}(x_*, 2R) \subseteq U$ となるように

選ぶ。このとき定理 1.1.5-(1) より $\delta > 0$ があって、任意の $(t_*, y) \in [S, T] \times \overline{B}(x_*, R)$ に対して t_* で初期値 y をとる $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上の解が存在する。いま、m を十分大きく取ると、$s_m + \delta > T$ かつ $X(s_m) \in \overline{B}(x_*, R)$ となるようにできる。$t_* = s_m$, $y = X(s_m)$ と選ぶと、t_* で初期値 y をとる $(t_* - \delta, t_* + \delta)$ 上の解 Y が存在する。$X(t_*) = Y(t_*)$ であるから系 1.1.7-(2) を用いれば、$X(t)$ と $Y(t)$ をつなぐことで、t_0 で初期値 x_0 をとる解は $t_* + \delta > \beta$ まで延長できる。これは β の定義に矛盾する。 □

上の定理で得られた (α,β) 上の解 $X(t)$ を微分方程式 (1.1.1) の t_0 **で初期値** x_0 **をとる最大限に延長された解**という。

系 1.1.9 (解の爆発)**.** $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ とし、$f:(a,b)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ は連続かつ $\mathbb{R}^n$ に関して *compact* 一様リプシッツ連続とする。$X:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^n$ を微分方程式 (1.1.1) の t_0 で初期値 x_0 をとる最大限に延長された解とする。このとき $\beta<b$ ならば $\lim_{t\uparrow\beta}|X(t)|=+\infty$.

定理 1.1.10 (初期値に関する解の連続性)**.** U を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$a,b\in\mathbb{R}, a<b$ とし、$f:(a,b)\times U\to\mathbb{R}^n$ は連続かつ U に関して *compact* 一様リプシッツ連続とする。$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ は $a<\alpha<\beta<b$ をみたし、$m\geq 1$ に対して $X_m:[\alpha,\beta]\to U$ および　$X:[\alpha,\beta]\to U$ はそれぞれ (1.1.1) の $[\alpha,\beta]$ 上の解とする。$m\geq 1$ に対して $t_m\in[\alpha,\beta]$ であり、$m\to\infty$ で $t_m\to t_*$ かつ $X_m(t_m)\to X(t_*)$ が成り立つとする。このとき、$[\alpha,\beta]$ 上で X_m は X に一様収束する。

証明.

$$J=\{t|t\in[\alpha,\beta],\ \text{ある } \rho>0 \text{ に対して } m\to\infty \text{ で } \\ X_m \text{ が } X \text{ に } [t-\rho,t+\rho]\cap[\alpha,\beta] \text{ 上で一様収束する}\}$$

と定義する。定義より J は $[\alpha,\beta]$ の開部分集合である。

Step 1:　$J\neq\emptyset$

Step 1 の証明: 定理 1.1.5 の設定で $S=\alpha, T=\beta, x=X(t_*)$ とおき、$\epsilon>0$ を $[\alpha-\epsilon,\beta+\epsilon]\subseteq(a,b)$ をみたすように、$R>0$ を $\overline{B}(x,2R)\subseteq U$ をみたすようにそれぞれ選ぶ。次に (1.1.2) をみたす $\delta>0$ をとる。$x_m=X_m(t_m)$ とおけば、$x_m\to x$ as $m\to\infty$ である。従って十分大きな m に対して $x_m\in\overline{B}(x,R)$. さらに m を大きくとっておけば $|t_m-t_*|\leq\delta/2$ とできる。このとき X_m は t_m で初期値 x_m をとる解なので定理 1.1.5-(1) より $t\in[t_m-\delta,t_m+\delta]$ ならば $X_m(t)\in\overline{B}(x,2R)$ である。いま、$t_m\leq t_*$ なら $[t_m,t_*]\subseteq[t_m-\delta,t_m+\delta]$, $t_*\leq t_m$ なら $[t_*,t_m]\subseteq[t_m-\delta,t_m+\delta]$ なので、

$$|X_m(t_m)-X_m(t_*)|\leq\sqrt{n}\left|\int_{t_m}^{t_*}|f(s,X_n(s))|ds\right|\leq\sqrt{n}M|t_m-t_*|.$$

従って $m\to\infty$ で $|X_m(t_m)-X_m(t_*)|\to 0$. よって $m\to\infty$ で $X_m(t_*)\to X(t_*)$ が成り立つ。従って m が十分大きいなら $X_m(t_*)\in\overline{B}(x,R)$. 再び定理 1.1.5-(1) より $t\in[t_*-\delta,t_*+\delta]$ で $X_m(t)\in\overline{B}(x,2R)$ となる。ここで定理 1.1.5-(3) を用いると、

$$\max_{t\in[t_*-\delta,t_*+\delta]}|X(t)-X_m(t)|\leq 2|X(t_*)-X_m(t_*)|$$

従って $[t_* - \delta, t_* + \delta]$ 上 $m \to \infty$ で X_m は X に一様収束する。

Step 2: J は閉集合

Step 2 の証明: $\{s_m\}_{m\geq 1} \subseteq J$ とし、$m \to \infty$ で $s_m \to s$ とする。Step 1 と同様に $\epsilon > 0$ を $[\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon] \subseteq (a, b)$ をみたすようにとる。$x_* = X(s)$ とおき、$\overline{B}(x_*, 2R) \subseteq U$ となるように $R > 0$ を選ぶ。(Step 1 の証明の R と同じとは限らない。) $S = \alpha, T = \beta, x = x_*$ として定理 1.1.5 を用いる。$\delta > 0$ を (1.1.2) を満たすように選ぶ。このとき m が十分大きいならば $|s_m - s| \leq \delta/2$ かつ $X(s_m) \in \overline{B}(x_*, R/2)$ となる。このような m に対して $s_m \in J$ よりある $K_m \geq 1$ があって $k \geq K_m$ ならば $X_k(s_m) \in \overline{B}(x_*, R)$ となる。X_k は s_m で初期値 $X_k(s_m)$ をとる解であるから、定理 1.1.5-(1) より任意の $t \in [s_m - \delta, s_m + \delta]$ で $X_k(t) \in \overline{B}(x_*, 2R)$ となる。よって定理 1.1.5-(3) を使えば $[s_m - \delta, s_m + \delta]$ 上 $k \to \infty$ で X_k は X に一様収束することがわかる。いま $|s_m - s| \leq \delta/2$ であるから $[s - \delta/2, s + \delta/2] \subseteq [s_m - \delta, s_m + \delta]$. 従って $s \in J$. すなわち J は閉集合である。

さて Step 1, Step 2 より J は $[\alpha, \beta]$ の開かつ閉な空でない部分集合となる。いま $[\alpha, \beta]$ は連結なので、$J = [\alpha, \beta]$ となる。よって任意の $t \in [\alpha, \beta]$ に対してある $\rho_t > 0$ があって $[t - \rho_t, t + \rho_t]$ 上 $m \to \infty$ で X_m は X に一様収束する。いま $\{(t - \rho_t, t + \rho_t)\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ は $[\alpha, \beta]$ の開被覆であり $[\alpha, \beta]$ は compact であるから、有限個の $T_1, \ldots, T_p$ があって

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{i=1,\ldots,p} (T_i - \rho_{T_i}, T_i + \rho_{T_i}).$$

いま、

$$\max_{t \in [\alpha, \beta]} |X_m(t) - X(t)| \leq \max_{i=1,\ldots,p} \left(\max_{t \in [T_i - \rho_{T_i}, T_i + \rho_{T_i}]} |X_m(t) - X(t)| \right)$$

であるから、$m \to \infty$ で $\max_{t \in [\alpha, \beta]} |X_m(t) - X(t)| \to 0$. よって $m \to \infty$ で X_m は X に $[\alpha, \beta]$ 上一様収束する。 □

§1.2 高階の常微分方程式

例 1.2.1. $a, b \in \mathbb{R}$ に対して次の 2 階の常微分方程式を考える。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0 \tag{1.2.1}$$

ここで、$y = dx/dt$ とおけば、(1.2.1) は 1 階の連立常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -ay - bx \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

と同等である。

一般に n 階微分可能な関数 $X : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ に対して、

$$\frac{d^n X}{dt^n} = F\left(t, X, \frac{dX}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}X}{dt^{n-1}}\right) \tag{1.2.3}$$

を X に関する n 階の常微分方程式という。ただし、F は $\mathbb{R}^{1+mn}$ の適当な領域（開集合）から $\mathbb{R}^m$ への写像である。(時間 t が 1 次元、$k = 1, \dots, n-1$ に対して $d^k X/dt^k \in \mathbb{R}^m$ であるから F の定義域の次元は $1 + mn$ である。ここで、$k = 1, \dots, n-1$ に対して $Y^{(k)} = d^k X/dt^k$ とおくと、(1.2.3) は 1 階の連立常微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ Y^{(1)} \\ \vdots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \\ \vdots \\ Y^{(n-1)} \\ F\big(t, X, Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n-1)}\big) \end{pmatrix}$$

に帰着する。

Chapter 2

線形常微分方程式

線型常微分方程式とは、(1.1.1) で $f(t,x)$ が x に関して線型である場合をいう。すなわち t に依存した $n \times n$ の行列 $A(t)$ があって、$X : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ が

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \tag{2.0.1}$$

と書ける場合 X は (a,b) 上での線型常微分方程式 (2.0.1) の解であるという。A が t に関して連続である場合（$A(t)$ の各成分が t に関して連続である場合）$A(t)X$ は $\mathbb{R}^n$ に関して compact 一様リプシッツである。

例 2.0.2. $n = 1$ のとき、線型常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x$$

の $t = 0$ で初期値 x_0 をとる解は

$$x(t) = e^{F(t)}x_0,$$

ただし $F(t) = \int_0^t f(s)ds.$

例 2.0.3.

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x + g(t)y$$
$$\frac{dy}{dt} = h(t)y$$

の解は、

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, H(t) = \int_0^t h(s)ds$$

とおくとき、

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{F(t)}x_0 + \left(e^{F(t)}\int_0^t g(s)e^{H(s)-F(s)}ds\right)y_0 \\
y(t) &= e^{H(t)}y_0
\end{aligned}
$$

§2.1　ノルム空間

以下では $K=\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする。

定義 2.1.1 (ノルム)**.** V を K-ベクトル空間とする。$u\in V$ に対して実数 $||u||$ を対応させる $||\cdot||$ が V のノルム（norm）であるとは、
(N1) 任意の $v\in V$ に対して $||u||\geq 0.$ さらに $||v||=0 \Leftrightarrow v=0.$
(N2) 任意の $\lambda\in K$ と $v\in V$ に対して $||\lambda v||=|\lambda|||v||.$
(N3) 任意の $u,v\in V$ に対して $||u+v||\leq||u||+||v||.$
が成り立つことである。さらに V 上の 2 つのノルム $||\cdot||_1$ と $||\cdot||_2$ が同値であるとは、ある定数 $c_1,c_2>0$ があって任意の $v\in V$ に対して

$$c_1||v||_1\leq||v||_2\leq c_2||v||_1$$

が成り立つことである。

命題 2.1.2. V を K-ベクトル空間とし、$||\cdot||$ をそのノルムとする。このとき、$u,v\in V$ に対して $d(u,v)=||u-v||$ と定義すると $d(\cdot,\cdot)$ は V 上の距離になる。V 上に 2 つの同値なノルム $||\cdot||_1$ と $||\cdot||_2$ があるとき、$d_i(v,u)=||v-u||_i$ と定義すると、2 つの距離 $d_1(\cdot,\cdot)$ と $d_2(\cdot,\cdot)$ は同値である。すなわちある $c_1,c_2>0$ があって任意の $u,v\in V$ に対して

$$c_1d_1(u,v)\leq d_2(u,v)\leq c_2d_1(u,v)$$

が成り立つ。

$d(\cdot,\cdot)$ をノルム $||\cdot||$ に付随する V 上の距離、$d(\cdot,\cdot)$ から決まる V の位相を $||\cdot||$ に付随する V の位相という。

定義 2.1.3. V を K-ベクトル空間、$||\cdot||$ をそのノルムとする。V が $||\cdot||$ に付随する距離に関して完備なとき、$(V,||\cdot||)$ を バナッハ空間（Banach space）という。

例 2.1.4. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$
$$|x|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

と定義する。このとき $|\cdot|_1, |\cdot_2|, |\cdot_3$ は $\mathbb{R}^n$ のノルムであり互いに同値になる。実際、

$$|x|_\infty \leq |x|_2 \leq |x|_1 \leq n|x|_\infty$$

が成り立つ。さらに $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ は Banach 空間である。

実は $\mathbb{R}^n$ のノルムについてはより一般に次の命題が成り立つ。

命題 2.1.5. $||\cdot||$ を $\mathbb{R}^n$ のノルムとするとき、$||\cdot||$ は $|\cdot|_2$ と同値である。

証明. $i = 1, \ldots, n$ に対して $e_i \in \mathbb{R}^n$ を i 番目の座標が 1 でそれ以外の座標は 0 であるベクトルとする。$M = \max_{i=1,\ldots,n} ||e_i||$ とおくと、$x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ より

$$||x|| = ||\sum_{i=1}^{n} x_i e_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|||e_i|| \leq M|x|_1$$

いま $|\cdot|_1$ は $|\cdot|_2$ と同値であるから、ある定数 $C_1 > 0$ があって任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $||x|| \leq C_1|x|_2$ が成り立つ。あとは

$$\text{ある } C_2 > 0 \text{ があって任意の } x \in \mathbb{R}^n \text{ で } C_2|x|_2 \leq ||x|| \tag{2.1.1}$$

を示せば命題の証明は完了する。背理法を用いて (2.1.1) を示す。すなわちある $\{x_m\}_{m\geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ があって、$m \to \infty$ で $\dfrac{||x_m||}{|x_m|_2} \to 0$ と仮定する。ここで $y_m = \dfrac{x_m}{|x_m|_2}$ とおけば、$|y_m|_2 = 1$ であり、$m \to \infty$ で $||y_m|| = \dfrac{||x_m||}{|x_m|_2} \to 0.$ いま $\{y_m\}_{m\geq 1}$ は有界な点列なので適当な部分列 $\{z_k\}_{k\geq 1}$ と $z \in \mathbb{R}^n$ があって $m \to \infty$ で $|z_m - z|_2 \to 0.$ このとき $|z|_2 = 1$ である。さて

$$|||z_m|| - ||z||| \leq ||z_m - z|| \leq C_1|z_m - z|_2$$

である。よって $||z|| = \lim_{m\to\infty} ||z_m|| = 0.$ 従って $z = 0.$ これは $|z|_2 = 1$ に矛盾する。従って (2.1.1) は示された。 □

例 2.1.6. (X,d) を完備な距離空間、$C_b(X,d)=\{f|f:X\to\mathbb{R}, f$ は X 上連続$\}$ とする。$f\in C_b(X,d)$ に対して、

$$|f|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|$$

とおくとき、$|\cdot|_b$ は $C(X,d)$ のノルムである。

定理 2.1.7. V を K-ベクトル空間、$||\cdot||$ をそのノルムとする。さらに $A: V\to V$ を線型写像とする。このとき次の 2 つは同値である。
(L1) A は $||\cdot||$ に付随する位相に関して V 上連続.
(L2)

$$\sup_{v\in V, v\neq 0}\frac{||Av||}{||v||}<+\infty.$$

証明. (L1) $\Rightarrow$ (L2): 対偶を示す。(L2) を否定すると、ある $\{x_m\}_{m\geq 1}\subset V$ で $m\to\infty$ で $\dfrac{||Ax_m||}{||x_m||}\to\infty$ と成るものがある。$y_m=\dfrac{x_n}{\sqrt{||x_m||||Ax_m||}}$ とおくと、$m\to\infty$ で

$$||y_m||=\sqrt{\frac{||x_m||}{||Ax_m||}}\to 0, ||Ay_m||=\sqrt{\frac{||Ax_m||}{||x_m||}}\to\infty$$

よって A は 0 で連続でない。
(L2) $\Rightarrow$ (L1): $C=\sup\limits_{v\in V, v\neq 0}\dfrac{||Av||}{||v||}$ とおく。$x\in V$、$m\to\infty$ で $x_m\to x$ とする。このとき $||Ax_m-Ax||=||A(x_m-x)||\leq C||x_m-x||$ より $m\to\infty$ で $Ax_m\to Ax$. よって A は V 上連続である。 $\square$

定義 2.1.8. V を K-ベクトル空間、$||\cdot||$ をそのノルムとする。定理 2.1.7 の (L2) の条件を満たす線型写像 $A:V\to V$ を V から V への有界線型写像（bounded linear operator）という。さらに、

$$L(V)=\{A|A \text{ は } V \text{ から } V \text{ への有界線型写像}\}$$

とおき、$A\in L(V)$ に対して

$$||A||_{L(V)}=\sup_{v\in V, v\neq 0}\frac{||Av||}{||v||}$$

と定義する。$||\cdot||_{L(V)}$ を $||\cdot||$ に関する $L(V)$ の作用素ノルム（operator norm）という。

命題 2.1.9. V を K-ベクトル空間、$||\cdot||$ をそのノルムとする。$L(V)$ は線型写像の自然な和と定数倍に関して K-ベクトル空間となり、$||\cdot||_{L(V)}$ は $L(V)$ のノルムであり、$A, B \in L(V)$ に対して、

$$||AB||_{L(V)} \leq ||A||_{L(V)}||B||_{L(V)}$$

が成り立つ。さらに $(V, ||\cdot||)$ が *Banach* 空間ならば $(L(V), ||\cdot||_{L(V)})$ も *Banach* 空間である。

証明. (N1): $A \in L(V)$ とする。$||A||_{L(V)} = 0$ なら任意の $v \in V$ に対して $Av = 0$. よって $A = 0$.
(N2): $A \in L(V)$, $\lambda \in K$ とするとき $||\lambda Ax|| = |\lambda|||Ax||$ より $||\lambda A||_{L(V)} = |\lambda|||A||_{L(V)}$.
(N3): $A, B \in L(V)$ とする。このとき $||(A+B)v|| = ||Av + Bv|| \leq ||Av|| + ||Bv||$. これより $||A+B||_{L(V)} \leq ||A||_{L(V)} + ||B||_{L(V)}$.

以上より $||\cdot||_{L(V)}$ は $L(V)$ のノルムである。$A, B \in L(V)$ とするとき、$Bv \neq 0$ ならば

$$\frac{||ABv||}{||v||} = \frac{||ABv||}{||Bv||}\frac{||Bv||}{||v||}$$

したがって $||AB||_{L(V)} \leq ||A||_{L(V)}||B||_{L(V)}$.

つぎに $(V, ||\cdot||)$ を Banach 空間とし、$\{A_m\}_{m\geq 1} \subset L(V)$ を Cauchy 列とする。すなわち任意の $\epsilon > 0$ に対してある $M_\epsilon > 0$ があって $n, m \geq M_\epsilon$ なら $||A_n - A_m||_{L(V)} < \epsilon$ が成り立つ。$v \in V$ に対して、$n, m \geq M_\epsilon$ なら

$$||A_n v - A_m v|| = ||(A_n - A_m)v|| \leq ||A_n - A_m||_{L(V)}||v|| \leq \epsilon||v||. \qquad (2.1.2)$$

よって $\{A_m v\}_{m\geq 1}$ は V の Cauchy 列となり V は Banach 空間より $m \to \infty$ で極限を持つ。その極限を Av と定義するとき、$A : V \to V$ は線型である。(2.1.2) で $m \to \infty$ とすると、$n \geq M_\epsilon$ ならば $||A_n v - Av|| \leq \epsilon||v||$. すなわち $n \geq M_\epsilon$ ならば $||A_n - A||_{L(V)} \leq \epsilon$. よって $n \to \infty$ で $A_n \to A$. つまり $(L(V), ||\cdot||_{L(V)})$ は Banach 空間である。 □

例 2.1.10. $L(\mathbb{R}^n) = M_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$, ただし $M_{m,n}(\mathbb{R})$ は $m \times n$ 実行列の全体とする。ここで $\mathbb{R}^n$ のノルム $|\cdot|_2$ に関する $L(\mathbb{R}^n)$ の作用素ノルムを $||\cdot||_2$ で表す。すなわち $||A||_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{|Ax|_2}{|x|_2}$. このとき $||\cdot||_2$ は $L(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n^2}$ のノルムである。命題 2.1.5 より $||\cdot||_2$ と $\mathbb{R}^{n^2}$ のノルム $|\cdot|_2$ は同値である。とくに $(L(\mathbb{R}^n), ||\cdot||_2)$ は Banach 空間である。

§2.2　作用素の指数関数

前の節と同様に $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ とし、V は K-ベクトル空間とする。

補題 2.2.1. $(V,||\cdot||)$ を *Banach* 空間とする。いま、$\{x_n\}_{n\geq 1}\subseteq V$ に対して、$\sum_{n\geq 1}||x_n||<+\infty$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_n$ は $n\to\infty$ で収束する。

定義 2.2.2. $(V,||\cdot||)$ をノルム空間とする。$\{x_n\}_{n\geq 1}\subset V$ とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} x_n$ が $n\to\infty$ で収束するときその極限を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ あるいは $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n$ と書く。

補題 *2.2.1* の証明. $y_N=\sum_{n=1}^{N} x_n$ とおくとき、$||y_{N+m}-y_N||\leq\sum_{n=N+1}^{N+m}||x_n||$. いま $\sum_{n=1}^{\infty}||x_n||<+\infty$ より、任意の $\epsilon>0$ に対して N が十分大きいならば $\sum_{n=N}^{N+m}||x_n||\leq\sum_{n\geq N}||x_n||<\epsilon$. 従って $||y_{N+m}-y_N||<\epsilon$ となり、$\{y_n\}_{n\geq 0}$ は V の Cauchy 列である。$(V,||\cdot||)$ は Banack 空間なのである $y\in V$ で $n\to\infty$ で $y_n\to y$. □

命題 2.2.3. $(V,||\cdot||)$ を *Banach* 空間とし、$A\in L(V)$ とする。このとき、

$$\sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{n!}$$

は収束する。その極限を e^A と書くことにするとき、$A,B\in L(V)$ に対して $AB=BA$ ならば

$$e^{A+B}=e^Ae^B$$

が成り立つ。

証明. $||A^n/n!||_{L(V)}\leq(||A||_{L(V)})^n/n!$ である。いま $a=||A||_{L(V)}$ とすると $\sum_{n=0}^{\infty}a^n/n!$ は収束する。従って補題 2.2.1 より $\sum_{n\geq 0}A^n/n!$ は収束する。次に $A,B\in L(V)$ で $AB=BA$ とする。$U_N=\{(n,m)|n,m\in\{0,1,\ldots,N\},n+m\geq N+1\}$ とおくと、

$$\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{N}\frac{B^m}{m!}\right)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{A^nB^m}{n!m!}$$
$$=\sum_{k=0}^{N}\sum_{r=0}^{k}\frac{A^{k-r}B^r}{(k-r)!r!}+\sum_{(n,m)\in U_N}\frac{A^nB^m}{n!m!}=\sum_{k=0}^{N}\frac{(A+B)^k}{k!}+\sum_{(n,m)\in U_N}\frac{A^nB^m}{n!m!}. \tag{2.2.1}$$

ここで $\alpha = ||A||_{L(V)}, \beta = ||B||_{L(V)}$ とおけば

$$\begin{aligned}\Big|\Big| \sum_{(n,m)\in U_N} \frac{A^n B^m}{n!m!} \Big|\Big|_{L(V)} &\leq \sum_{(n,m)\in U_N} \frac{\alpha^n \beta^m}{n!m!} \\ &\leq \sum_{k\geq N+1} \frac{(\alpha+\beta)^k}{k!} = e^{\alpha+\beta} - \sum_{k=0}^{N} \frac{(\alpha+\beta)^k}{k!}\end{aligned}$$

よって $N \to \infty$ で $\sum_{(n,m)\in U_N} \frac{A^n B^m}{n!m!} \to 0$ である。これより、(2.2.1) で $N \to \infty$ とすれば、$e^A e^B = e^{A+B}$. □

定義 2.2.4. $(V, ||\cdot||)$ をノルム空間とする。$a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ とし、$f : (a, b) \to V$ とする。f が $\alpha \in (a, b)$ で微分可能であるとは、ある $v \in V$ に対して、

$$\lim_{h\to 0} \Big|\Big| \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} - v \Big|\Big| = 0$$

となることである。$v = \dfrac{df}{dt}(\alpha)$ とかき、f の α での微分と呼ぶ。

命題 2.2.5. $(V, ||\cdot||)$ を *Banach* 空間とする。$A \in L(V)$ とし $t \in \mathbb{R}$ に対して $U(t) = e^{tA}$ とする。このとき任意の $t \in \mathbb{R}$ において $U(t)$ は微分可能であり $\dfrac{dU}{dt} = AU(t) = U(t)A$ が成り立つ。

証明.

$$\begin{aligned}\frac{U(t+h) - U(t)}{h} = \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} &= e^{tA} \frac{e^{hA} - I}{h} = e^{tA}\Big(A + h\sum_{n\geq 2} h^{n-2} \frac{A^n}{n!}\Big) \\ &= \frac{e^{hA} - I}{h} e^{tA} = \Big(A + h\sum_{n\geq 2} h^{n-2}\frac{A^n}{n!}\Big) e^{tA}\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

いま $B(h) = \sum_{n\geq 2} h^{n-2} \dfrac{A^n}{n!}$ とおけば、$|h| \leq 1$ なら

$$||B(h)||_{L(V)} \leq \sum_{n\geq 2} |h|^{n-2} \frac{(||A||_{L(V)})^n}{n!} \leq e^{||A||_{L(V)}}.$$

従って (2.2.2) で $h \to 0$ とすれば $\dfrac{dU}{dt} = AU(t) = U(t)A$. □

§2.3　自励系線型常微分方程式

自励系の線型常微分方程式は一般に $A \in M_{n,n}(K)$ を用いて、

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2.3.1}$$

と表される。ただし $K = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ とする。この微分方程式の解は前の節の結果により次のように表される。

定理 2.3.1. (2.3.1) の $t = 0$ で初期値 $x_0 \in K^n$ を取る解は、

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

で与えられる。

e^{tA} を具体的に計算するには Jordan の標準形を用いる。

定義 2.3.2. $k \in \mathbb{N}$ に対して、$I_k, J_k \in M_{k,k}(\mathbb{C})$ を I_k は単位行列、

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 2.3.3 (Jordan の標準形)**.** $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ とする。このとき、ある $P \in M_{n,n}(\mathbb{C})$、$n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, A の固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, が存在して P は正則、$n_1 + \dots + n_m = n$ であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 I_{n_2} + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_m I_{n_m} + J_{n_m} \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

が成り立つ。

定義 2.3.4. 命題 2.3.3 における $P^{-1}AP$ を A の Jordan 標準形、$\alpha_i I_{n_i} + J_{n_i}$ を A の Jordan 細胞（Jordan cell）という。とくに全ての $i = 1, \dots, m$ に対して $n_i = 1$ のとき（すなわち $m = n$ のとき）A は対角化可能（diagonlizable）あるいは半単純（semisimple）であるという。

補題 2.3.5. $P, A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ で P が正則ならば

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^{A}P$$

補題 2.3.6.

$$e^{tJ_k} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

補題 2.3.5 より

$$e^{tA} = Pe^{tA}P^{-1}$$

である。ここで補題 2.3.6 を用いれば、

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t}e^{tJ_{n_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t}e^{tJ_{n_2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\alpha_m t}e^{tJ_{n_m}} \end{pmatrix} P^{-1} \tag{2.3.3}$$

すなわち $B = P^{-1}AP$ とおくと、

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{e^{tA}} & K^n \\ \Big\uparrow P & & \Big\uparrow P \\ K^n & \xrightarrow{e^{tB}} & K^n \end{array} \tag{2.3.4}$$

以上より、次の定理が得られる。

定理 2.3.7. $x(t)$ を (2.3.1) の $(-\infty, \infty)$ における解とするとき、$P^{-1}x(t)$ は

$$\frac{dy}{dt} = By \tag{2.3.5}$$

の解である。逆に $y(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の (2.4.7) の解とするとき $Py(t)$ は (2.3.1) の解である。すなわち

$$\mathrm{S}(A) = \{x(t) | x(t) \text{ は } (-\infty, \infty) \text{ 上の } (2.3.1) \text{ の解}\}$$

とするとき、

$$P : S(B) \to S(A)$$

は可逆な線型写像である。

系 2.3.8. (2.3.1) の解 $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ は、ある $\{\lambda_{i,j}^k | k = 1, \ldots, n, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n_i\} \subseteq \mathbb{C}$ に対して、

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j}^k t^{j-1} e^{\alpha_i t}$$

と表される。とくに A が対角化可能なときは、

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k e^{\alpha_i t}$$

となる。

注意. $K = \mathbb{R}$ であり従って $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ のとき、虚部が 0 でない固有値がある場合、すなわちある i で $\alpha_i = \eta_i + \sqrt{-1}\omega_i$ となるときは $\overline{\alpha_i} = \eta_i - \sqrt{-1}\omega_i$ も固有値であり、Jordan 細胞の大きさも同じである。このとき実数値の解は、$j = 0, 1, \ldots, n_i - 1$ に対して

$$t^j e^{\eta_i t} \cos \omega_i t \qquad t^j e^{\eta_i t} \sin \omega_i t$$

の組み合わせで書くことが出来る。

例 2.3.9.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

である。また、$a, b \in \mathbb{R}$ に対して、

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

とする。このとき、

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{bt} \end{pmatrix}$$

である。このとき、$A = PBP^{-1}$ とおけば

$$A = \begin{pmatrix} -a+2b+2 & a-b-1 & -2a+2b+3 \\ 2a-2b+4 & b-2 & 2a-2b+6 \\ 2a-2b & -a+b & 3a-2b \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} (-1+2t)e^{at}+2e^{bt} & (1-t)e^{at}-e^{bt} & (-2+3t)e^{at}+2e^{bt} \\ (2+4t)e^{at}-2e^{bt} & -2te^{at}+e^{bt} & (2+6t)e^{at}-2e^{bt} \\ 2e^{at}-2e^{bt} & -e^{at}+e^{bt} & 3e^{at}-2e^{bt} \end{pmatrix}$$

となる。たとえば $a = b = -1$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, e^{tA} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+2t & -t & 3t \\ -4t & 1-2t & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a = -1, b = 2$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 9 \\ -2 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

例 2.3.10. P は例 2.3.9 と同じとする。$\alpha, \eta, \omega \in \mathbb{R}$ に対して、

$$B = \begin{pmatrix} \eta & -\omega & 0 \\ \omega & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

とすると B の固有値は $\eta \pm \sqrt{-1}\omega, \alpha$ であり、$z = \eta + \sqrt{-1}\omega$ とおくと、

$$B^n = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z^n) & -\mathrm{Im}(z^n) & 0 \\ \mathrm{Im}(z^n) & \mathrm{Re}(z^n) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

従って、

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{\eta t}\cos\omega t & -e^{\eta t}\sin\omega t & 0 \\ e^{\eta t}\sin\omega t & e^{\eta t}\cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}$$

いま $A = PBP^{-1}$ とする。このとき

$$A = \begin{pmatrix} -\eta-2\omega+2\alpha & \eta+\omega-\alpha & -2\eta-3\omega+2\alpha \\ 2\eta-6\omega-2\alpha & 4\omega+\alpha & 2\eta-10\omega-2\alpha \\ 2\eta-\omega-2\alpha & -\eta+\omega+\alpha & 3\eta-2\omega-2\alpha \end{pmatrix}$$

ここで、$e^{tA}=Pe^{tB}P^{-1}$ より、e^{tA} は A の η,ω,α をそれぞれ $e^{\eta t}\cos\omega t, e^{\eta t}\sin\omega t, e^{\alpha t}$ で置き換えたものになる。例えば、$\omega=\eta=\alpha=-1$ のとき、

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & -5 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
e^{tA} &= e^{-t}\begin{pmatrix} -\cos t+2\sin t+2 & \cos t-\sin t-1 & -2\cos t+3\sin t+2 \\ 2\cos t+6\sin t-2 & -4\sin t+1 & 2\cos t+10\sin t-2 \\ 2\cos t+\sin t-1 & -\cos t-\sin t+1 & 3\cos t+2\sin t-2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

§2.4 自励系線型常微分方程式の解の安定性

$K=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする。自励系常微分方程式 (2.3.1)

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

の自明な解として、$x(t)=0$ がある。この解の安定性を考える。
A の Jordan 細胞の大きさを $n_1,\ldots,n_m$ $(n_1+\ldots+n_m=n)$, 対応する固有値を $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$、固有値の実部を $\eta_1,\ldots,\eta_m$ とする。さらに A の Jordan 標準形を B とし、A を Jordan 標準形に変形する座標変換を P とする。すなわち、

$$B=P^{-1}AP$$

定義 2.4.1. A の安定指数 $I_S(A)$ を

$$I_S(A)=\sum_{j:\eta_j<0} n_j$$

で定義する。さらに A の安定部分空間 $L_S(A)\subseteq K^n$ を

$$\{x_0 | x_0\in K^n, x(t) \text{ を初期値 } x_0 \text{ の (2.3.1) の解とすると } \lim_{t\to\infty} x(t)=0\}$$

と定義する。

$L_S(A)$ は K^n の部分ベクトル空間である。

定理 2.4.2.

$$\dim_K L_S(A)=I_S(A)$$

特に、任意の $i=1,\ldots,m$ に対して $\eta_i<0 \Leftrightarrow$ (2.3.1) の任意の解 $x(t)$ は $t\to\infty$ で $|x(t)|\to 0$

証明. 簡単のために $K=\mathbb{C}$ とする。前の節と同様に、A を Jordan の標準形に変換する行列を P とおく。すなわち、(2.3.2) が成り立つとする。ここで $B=P^{-1}AP$ とおくとき、$I_S(B)=I_S(A)$. ここで、微分方程式

$$\frac{dy}{dt}=By \tag{2.4.6}$$

の $t=0$ で初期値 $y_0\in\mathbb{R}^n$ をとる解は $u_i\in\mathbb{C}^{n_i}$ に対して

$$y_0=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix} \tag{2.4.7}$$

とおくとき、

$$y(t)=e^{tB}y_0=\begin{pmatrix}e^{\alpha_1 t}e^{tJ_{n_1}}u_1\\ \vdots\\ e^{\alpha_m}e^{tJ_{n_m}}u_m\end{pmatrix} \tag{2.4.8}$$

いま、それぞれの Jordan 細胞 $e^{\alpha_i t}e^{tJ_{n_i}}$ について

$$\text{任意の } u_i\in\mathbb{C}^n \text{ で } \lim_{t\to\infty}e^{\alpha_i t}e^{tJ_{n+i}}u=0 \quad\Leftrightarrow\quad \eta_i<0$$

従って

$$L_S(B)=\{y_0|y_0 \text{ を (2.4.7) で表したとき } \eta_i\geq 0 \text{ となる } i \text{ について } u_i=0\}$$

とくに、$\dim_{\mathbb{C}}L_S(B)=I_S(B)$ が成り立つ。ここで、$x(t)=Py(t)$ とおくと、定理 2.3.7 より $x(t)$ は (2.3.1) の $t=0$ で初期値 Py_0 をとる解であり

$$L_S(A)=\{Py_0|y_0\in L_S(B)\}$$

これより、$\dim_{\mathbb{C}}L_S(A)=\dim_{\mathbb{C}}L_S(B)=I_S(B)=I_S(A)$. □

定理 2.4.3. (1) 任意の $i=1,\dots,m$ に対して $\eta_i\leq 0$ かつ $\eta_i=0$ となる固有値の *Jordan* 細胞の大きさは 1 ⇔ (2.3.1) の任意の解 $x(t)$ は $t\to\infty$ で有界（ある $C>0$ があって $t=0$ で初期値 x_0 をとる解 $x(t)$ に対して、$|x(t)|\leq C|x_0|$ が任意の $t>0$ で成立する。）
(2) (1) でないときはある解 $x(t)$ で $\lim_{t\to\infty}|x(t)|\to\infty$ となるものがある。

証明. 定理 2.4.2 の証明の (2.4.7), (2.4.8) より、

$$
\begin{aligned}
&(2.4.6) \text{ の任意の解 } y(t) \text{ が } t \to \infty \text{ で有界} \Leftrightarrow \\
&\quad \text{任意の } i, \text{ 任意の } u_i \in \mathbb{C}^{n_i} \text{ について } e^{\alpha_i t} e^{tJ_{n_i}} u_i \text{ が } t \to \infty \text{ で有界} \Leftrightarrow \\
&\qquad \text{任意の } i \text{ に対して } \eta_i \leq 0 \text{ であり } \eta_i = 0 \text{ なら } n_i = 1
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
&\text{ある } (2.4.6) \text{ の解 } y(t) \text{ に対して } \lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty \Leftrightarrow \\
&\quad \text{ある } i \text{ とある } u_i \in K^{n_i} \text{ に対して } \lim_{t\to\infty} |e^{\alpha_i t} e^{tJ_{n_i}} u_i| = \infty \Leftrightarrow \\
&\qquad \text{ある } i \text{ に対して 「}\eta_i > 0\text{」 または 「}\eta_i = 0 \text{ かつ } n_i \geq 2\text{」}.
\end{aligned}
$$

以上より B に関して定理 2.4.3 は成り立つ。定理 2.3.7 により (2.3.1) の解 $x(t)$ と (2.4.6) の解 $y(t)$ は $x(t) = Py(t)$ で一対一で対応し、$t \to \infty$ で $|x(t)|$ が有界（無限大に発散）$\Leftrightarrow$ $|y(t)|$ が有界（無限大に発散）。よって A についても定理が成立する。 □

定理 2.4.4. $\beta \in \mathbb{R}$ は任意の $i = 1, \ldots, m$ に対して $\eta_i < \beta$ をみたすとする。このとき、ある $C > 0$ があって任意の $t \geq 0$ で

$$||e^{tA}|| \leq Ce^{bt}$$

ただし $||\cdot||$ は行列の作用素ノルム $||\cdot||_{L(\mathbb{R}^n)}$ を表す。

証明. e^{tA} の (i,j) 成分を $a_{ij}(t)$ と書くとき、

$$a_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\eta_k t} e^{\sqrt{-1}\omega_k t} \sum_{l=1}^{n_k} c_{kl} t^{l-1}$$

と表される。従ってある定数 $C_{ij} > 0$ があって

$$|a_{ij}(t)| \leq C_{ij} e^{\beta t}$$

さて $M_{n,n}(\mathbb{R}^n)$ の作用素ノルムは、$\mathbb{R}^{n^2}$ の $|\cdot|_\infty$ と同値である。すなわちある $C_\infty > 0$ があって任意の $Z \in M_{n,n}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$||Z||_{L(\mathbb{R}^n)} \leq C_\infty |Z|_\infty$$

従って、

$$||e^{tA}|| \leq C_\infty |e^{tA}|_\infty = C_\infty \max |a_{ij}(t)| \leq \big(C_\infty \max C_{ij}\big) e^{\beta t}$$

□

Chapter 3

自励系常微分方程式の局所理論

§3.1　局所安定性

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし、$f : U \to \mathbb{R}^n$ は U 上で C^1 級であるとする。このとき、自励系常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{3.1.1}$$

について考察する。ただし、$x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

$x(t)$ が (α, β) 上で定義された (3.1.1) の解とする。いま任意の $t \in (\alpha, \beta)$ に対して $x(t) = x_*$ であるとすると、$\frac{dx}{dt} = 0$ であるから $f(x_*) = 0$ である。また $f(x_*) = 0$ をみたす x_* に対して、任意の $t \in \mathbb{R}^n$ に対して $x(t) = x_*$ とおけば $x(t)$ は $(-\infty, \infty)$ 上の (3.1.1) の解である。

定義 3.1.1. (1) $x_* \in U$ が (3.1.1) の定常解（stationary solution）、平衡点 (equilibrium)、あるいは固定点（fixed point) であるとは、$f(x_*) = 0$ が成り立つことである。
(2)　$x_* \in U$ を (3.1.1) の平衡点とする。このとき線型常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = Df(x_*)y$$

を (3.1.1) の x_* における線型化方程式という。ここで $Df(x_*)$ は f の x_* での微分である。すなわち

$$Df(x_*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_*) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_*) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_*) \end{pmatrix}$$

(3) x_* を (3.1.1) の平衡点とし $Df(x_*)$ の固有値の実部の集まりを $\{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ とする。任意の $i = 1, \ldots, m$ について $\eta_i \neq 0$ のとき x_* は双曲的（hyperbolic）であるという。$Df(x_*)$ の安定指数 $I_S(Df(x_*))$ が n のとき（すなわち任意の $i = 1, \ldots, m$ で $\eta_i < 0$ のとき）x_* は安定な平衡点（stable equilibrium）であるという。

定理 3.1.2. x_* を (3.1.1) の安定な平衡点とし、$Df(x_*)$ の固有値の実部の最大値を η とする。いま $\eta < \delta < 0$ となる δ に対して、ある $C > 0$ とある $R > 0$ があって、任意の $x_0 \in \overline{B}(x_*, R)$ に対して $t = 0$ で初期値 x_0 をとる解 $x(t)$ は $[0, \infty)$ 上で存在し、任意の $t \geq 0$ に対して、

$$|x(t) - x_*| \leq Ce^{\delta t}|x_0 - x_*|$$

をみたす。とくに $\lim_{t \to \infty} x(t) = x_*$ である。

x_* を (3.1.1) の平衡点とする。平行移動して、$y = x - x_*$ とし、$\tilde{f}(y) = f(y + x_*)$ とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{f}(y)$$

となる。この方程式では $y = 0$ が平衡点となる。このように (3.1.1) が平衡点 x_* をもてば、平行移動により $x_* = 0$ とすることができる。今後は簡単のため (3.1.1) は 0 を平衡点に持つと仮定する。さらに $A = Df(0)$ とおき、A の固有値の実部の集合を $\{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ とする。このとき、

$$g(x) = f(x) - Ax$$

とおくと、$g : U \to \mathbb{R}^n$ は U 上 C^1 級であり、

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

と書け、任意の i, j に対して $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(0) = 0$ をみたす。

補題 3.1.3. 任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $R_1 > 0$ があって、任意の $x \in \overline{B}(0, R_1)$ に対して、

$$|g(x)| \leq \epsilon|x|$$

が成りたつ。

補題 3.1.4 (Grownwall の不等式)**.** $g : [0, T] \to [0, \infty), v : [0, T] \to [0, \infty)$ を $[0, T]$ 上で連続とする。いま、ある $C \geq 0$ に対して任意の $t \in [0, T]$ で

$$v(t) \leq C + \int_0^t v(s)\varphi(s)ds$$

が成り立つならば、任意の $t \in [0, T]$ で

$$v(t) \leq C \exp\left(\int_0^t \varphi(s)dx\right).$$

証明. $U(t) = C + \int_0^t v(s)\varphi(s)ds$ とするとき、

$$\frac{dU}{dt}(t) = v(t)\varphi(t) \leq U(t)\varphi(t)$$

従って、$G(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$ とおくとき、

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-G(t)}U(t)\right) \leq 0$$

よって

$$e^{-G(t)}U(t) \leq e^{-G(0)}U(0) = C$$

これより

$$v(t) \leq U(t) \leq Ce^{G(t)}$$

□

定理 *3.1.2* の証明. $\beta < 0$ を $\eta < \beta < \delta$ となるように選ぶ。定理 2.4.4 よりある $C_0 > 0$ があって任意の $t \geq 0$ で

$$||e^{tA}|| \leq C_0 e^{\beta t} \tag{3.1.2}$$

が成り立つ。ここで $\epsilon > 0$ を $\beta + \epsilon\sqrt{n}C_0 = \delta$ となるように選ぶ。この $\epsilon > 0$ に対して補題 3.1.3 の R_1 をとり、$R = \dfrac{R_1}{2}\min\left\{\dfrac{1}{C_0}, 1\right\}$ とする。$x_0 \in \overline{B}(0, R)$

に対して $x(t)$ を $t=0$ で x_0 をとる最大限に延長された解とし、その定義域を $[0,T)$ とする。($T=\infty$ となることも許す。)$x_0 \leq R_1/2$ であるから、ある $T_* < T$ があって $[0,T_*]$ では $x(t) \in \overline{B}(0,R_1)$ である。

$$\frac{d}{ds}x(s) - Ax(s) = g(x(s))$$

より、両辺に e^{-As} をかけて、

$$\frac{d}{ds}\big(e^{-As}x(x)\big) = e^{-sA}g(x(s))$$

$t \in [0,T_*]$ とし 0 から t まで積分し、e^{tA} をかけると

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(x(s))ds$$

補題 3.1.3 と (3.1.2) より

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leq ||e^{tA}|||x_0| + \int_0^t \sqrt{n}||e^{(t-s)A}|||g(x(s))|ds \\ &\leq C_0e^{\beta t}|x_0| + \int_0^t \sqrt{n}C_0\epsilon e^{\beta(t-s)}|x(s)|ds\end{aligned}$$

$v(t) = e^{-\beta t}|x(t)|$ とおくと、

$$v(t) \leq C_0|x_0| + \int_0^t \sqrt{n}C_0\epsilon v(s)ds$$

補題 3.1.4 より

$$v(t) \leq C_0|x_0|e^{\sqrt{n}C_0\epsilon t}.$$

従って

$$|x(t)| \leq C_0|x_0|e^{\delta t}. \tag{3.1.3}$$

もしある $T_1 \in (0,T)$ があって $x(t) \notin \overline{B}(0,R_1)$ ならば、

$$T_2 = \inf\{t | x(t) \notin \overline{B}(0,R_1)\}$$

とおくと、$[0,T_2]$ で $x(t) \in \overline{B}(0,R_1)$ で $|x(T_2)| = R_1$. ところが $T_* = T_2$ として、(3.1.3) を使うと、

$$|x(T_2)| \leq C_0|x_0| \leq R_1/2$$

この矛盾より、任意の $t \in [0,T)$ で $x(t) \in \overline{B}(0,R_1)$ である。いま T が有限なら、系 1.1.9 よりある T_1 で $x(t) \notin \overline{B}(0,R_1)$ となる。従って、$T=\infty$ となり任意の t で $x(t) \in \overline{B}(0,R_1)$ でありさらに (3.1.3) をみたす。 □

§3.2 安定多様体

例 3.2.1.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x \\ \frac{dy}{dt} &= y - x^2,\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

この方程式の $t=0$ で (x_0, y_0) を初期値とする解は、

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= \Big(y_0 - \frac{(x_0)^2}{3}\Big)e^t + \frac{(x_0)^2}{3}e^{-2t}\end{aligned}$$

ここで $\varphi(x) = x^2/3$ とおくと、

$$\limsup_{t\to\infty} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} < +\infty \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = 0 \Leftrightarrow y_0 = \varphi(x_0)$$

が成り立ちさらに

$$y_0 = \varphi(x_0) \Leftrightarrow y(t) = \varphi(x(t))$$

例 3.2.2.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x(1-x)(1-2y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(1-y)(1-2x),\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

とする。このとき、

$$f(x,y) = x(x-1)y(y-1)$$

とおけば、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial x}\end{aligned}$$

であるので、$(x(t), y(t))$ を (3.2.5) の解とするとき $F(t) = f(x(t), y(t))$ とおくと、

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

従って解の上では $f(x,y)$ は定数となる。

自励系常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{3.2.6}$$

を考える。$U \subseteq \mathbb{R}^n$ は開集合とし、$f : U \to \mathbb{R}^n$ は C^2 級であるとする。さらに、0 が (3.2.6) の hyperbolic な平衡点であるとする。このとき、$A = Df(0)$ とおくと (3.2.6) の 0 での線型化方程式は、

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

となる。いま適当に座標変換を行うことで、$m = \dim_{\mathbb{R}} L_S(A)$ とおくと、

$$L_S(A) = \{(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) | (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m\}$$

とすることが出来る。

定理 3.2.3. η を実部が負の A の固有値の実部の最大値とする。任意の $\beta \in (\eta, 0)$ に対してある $R > 0,\ C > 0$ と C^1 級の写像 $\varphi : L_S(A) \cap \overline{B}(0, R) \to \mathbb{R}^{n-m}$ があって、次をみたす。
(1) φ のグラフは $L_S(A)$ に接する。すなわち

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, \ldots, x_m) \\ \cdots \\ \varphi_{n-m}(x_1, \ldots, x_m) \end{pmatrix}$$

とおくとき、任意の $1 \leq m \leq i$ 任意の $1 \leq j \leq n - m$ に対して $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(0) = 0$ が成り立つ。
(2) $x_0 \in \overline{B}(0, R)$ とするとき、$t = 0$ で初期値 x_0 をとる解 $x(t)$ が $[0, \infty)$ 上で存在し、任意の $t > 0$ について $x(t) \in \overline{B}(0, R)$ であるための必要十分条件は x_0 が φ のグラフ上にあること。さらに x_0 が φ のグラフ上にあるなら、任意の $t > 0$ に対して $x(t)$ は φ のグラフ上にあり、

$$|x(t)| \leq C|x_0|e^{\beta t}$$

を満たす。特に $t \to \infty$ で $x(t) \to 0$ である。

上の定理の φ のグラフ $\{(y, \varphi(y)) | y \in L_S(A) \cap \overline{B}(0, R)\}$ を (3.2.6) の平衡点 0 における安定多様体（stable manifold）という。

例 3.2.4 (Lorenz 方程式).

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\
\frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\
\frac{dz}{dt} &= xy - \beta z
\end{aligned}
$$

は Lorenz 方程式と呼ばれる。σ, ρ, β は実数のパラメーターである。この方程式は流体の満たす偏微分方程式を特殊な場合のある種の近似にあたる。明らかに 0 は平衡点であり、0 での線型部分は

$$
\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}
$$

となる。固有値は $-\beta$ と

$$
\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma(1-\rho) = 0
$$

の解となる。それらを λ_1, λ_2 とおきそれぞれの実部を η_1, η_2 とする。$\beta > 0$ としておくと

(a) 0 が安定 $\Leftrightarrow \eta_1 < 0, \eta_2 < 0 \Leftrightarrow \sigma > -1$ かつ $\sigma(1-\rho) > 0$

(b) $\eta_1 > 0, \eta_2 > 0 \Leftrightarrow \sigma < -1$ かつ $\sigma(1-\rho) > 0$

(c) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Leftrightarrow \sigma(1-\rho) < 0$

となる。$\sigma = 28, \rho = 10, \beta = 8/3$ のときにはいわゆる Lorenz attractor が出現し、カオスの典型的な例として知られる。このときは、$\sigma(1-\rho) < 0$ なので (c) の場合である。

定理 3.2.3 において 0 は hyperbolic な平衡点であるので、A の Jordan 標準形は B は $m = \dim_{\mathbb{R}} L_S(A)$ とおくと、

$$
B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}
$$

ただし、$B_1 \in M_{m,m}(\mathbb{R}), B_2 \in M_{n-m,n-m}(\mathbb{R})$ で B_1 の固有値の実部はすべて負、B_2 の固有値の実部は全て正である。いま $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ を A を Jordan 標準形に変換する正則な行列とする。すなわち $B = P^{-1}AP$ が成り立つ。ここで、$y = P^{-1}x$ と座標を変換しておくと、定理にあるように $L_S(A) = \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) | x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\}$ とできる。このとき、微分方程式 (3.2.6) は

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= B_1 z + F(z, w) \\ \frac{dw}{dt} &= B_2 w + G(z, w), \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

という形になる。ここで $F(z, w), G(z, w)$ の $(z, w) = (0, 0)$ での偏導関数は全て 0 である。

定理 3.2.3 を一般的に証明する代わりにここでは $n = 2$ の場合について証明を行う。証明の方法の本質的な部分は、一般の次元の場合と変わらない。$n = 2$ の場合に (3.2.7) は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x + F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= \beta y + G(x, y), \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

ただし、$\alpha, \beta > 0,\ R_* > 0$ に対して $F : B(0, R_*) \to \mathbb{R}, G : B(0, R_*) \to \mathbb{R}$ は C^2 級であり、$F(0, 0) = G(0, 0) = 0$ かつ

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial G}{\partial y}(0, 0) = 0$$

をみたす。

定理 3.2.5. $0 < R < R_*$ をみたす定数 R, C^1 級の関数 $\varphi : [-R, R] \to \mathbb{R}$ で $\varphi(0) = 0$ かつ $\varphi'(0) = 0$ をみたすものが存在して次が成り立つ：

$(x_0, y_0) \in \overline{B}(0, R)$ に対して $t = 0$ で初期値 $(x_0, \varphi(x_0))$ をとる解 $X(t)$ が $[0, \infty)$ 上で存在して任意の $t \geq 0$ で $X(t) \in \overline{B}(0, R)$ となるための必要十分条件は $y_0 = \varphi(x_0)$ となることである。また $y_0 = \varphi(x_0)$ のとき、解を $X(t : x_0) = (x(t : x_0), y(t : x_0))$ とおくと、$|x(t : x_0)|$ は単調減少であり任意の $t \geq 0$ で

$$y(t : x_0) = \varphi(x(t : x_0)), \tag{3.2.9}$$

$$|x(t : x_0)| \leq 2|x_0| e^{-\alpha t} \tag{3.2.10}$$

を満たす。

補題 3.2.6. ある $R_1 \in (0, R_*), C_1 > 0$ があって 任意の $X, Y \in \overline{B}(0, R_1)$ に対して、

$$\begin{aligned} |F(X) - F(Y)| &\le C_1|X - Y|(|X| + |Y|) \\ |G(X) - G(Y)| &\le C_1|X - Y|(|X| + |Y|) \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

が成り立つ。

補題 3.2.7. $R_2 = \min\left\{R_1, \dfrac{\beta}{8C_1}\right\}$ とする。$(x_0, y_0) \in \overline{B}(0, R_2)$ で $|x_0| < |y_0|$ とし、$X(t) = (x(t), y(t)) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ は $t = 0$ で初期値 (x_0, y_0) をとる (3.2.8) の最大限に延長された解とする。このときある $t_* > 0$ があって $|X(t_*)| > R_2$ となる。

証明. 背理法で示す。任意の $t \ge 0$ に対して $|X(t)| \le R_2$ とする。このとき系 1.1.9 より $X(t)$ は $[0, \infty)$ 上で定義される。ここで

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y) | (x, y) \in \overline{B}(0, R_2), |x| < |y|\}, \\ K &= \{(x, y) | (x, y) \in \overline{B}(0, R_2), |x| \ge |y|\} \end{aligned}$$

とおく。さらに $I_U = \{t | t \ge 0, X(t) \in U\}$, $I_K = \{t | t \ge 0, X(t) \in K\}$ とおく。$x(t), y(t)$ は連続より I_U は開集合で $0 \in I_U$, I_K は閉集合である。$I_K \ne \emptyset$ とし $t_1 = \inf I_K$ とおく。I_U は開集合より、$[0, t_1) \subseteq I_U, t_1 \in I_K$ である。いま $X(t) \in U$ とすると補題 3.2.6 より

$$|G(x, y)| \le 2C_1 y^2 \le \frac{\beta}{4}|y|$$
$$|yG(x, y) - xF(x, y)| \le 4C_1|y|^3 \le \frac{\beta}{2}y^2$$

となり、

$$\frac{d}{dt}y^2 = 2y(\beta y + G(x, y)) \ge \frac{3\beta}{2}y^2 \tag{3.2.12}$$

$$\frac{d}{dt}(y^2 - x^2) = 2(\beta y^2 + \alpha x^2 + yG(x, y) - xF(x, y)) \ge \beta y^2 + 2\alpha x^2 \ge 0 \tag{3.2.13}$$

よって $[0, t_1)$ では $y(t)^2 - x(t)^2$ は単調非減少であり、$y(t_1)^2 - x(t_1)^2 \ge y(0)^2 - x(0)^2 > 0$ となる。これは $X(t_1) \in K$ に矛盾するので、$[0, \infty) \in I_U$. このとき、(3.2.12) より、$t \ge 0$ で

$$y(t)^2 \ge e^{3\beta t/2} y(0)^2.$$

$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty$ となり、$\sup_{t\in[0,\infty)} |X(t)| \le R_2$ に矛盾する。 □

補題 3.2.8. $R_3 = \min\left\{R_2, \dfrac{\alpha}{4C_1}\right\}$ とする。$X : [0,\infty) \to \overline{B}(0, R_3)$ を (3.2.8) の解とする。さらに $X(t) = (x(t), y(t))$ とおくと、ある $t_* > 0$ で $x(t_*) \neq 0$ であるとする。このとき任意の $t \geq 0$ で $|x(t)| \geq |y(t)|$、$dx/dt \neq 0$、$|x(t)|$ は単調減少であり $|x(t)| \leq e^{-\alpha t/2}|x(0)|$ が成り立つ。

証明. ある $t_0 \geq 0$ で $|x(t_0)| < |y(t_0)|$ とする。 $X_*(t) = X(t - t_0)$ とするとき、$X_*(t)$ は $t = 0$ で初期値 $X(t_0)$ をとる (3.2.8) の解である。 補題 3.2.7 よりある $t_* > 0$ で $|X_*(t_*)| > R_2 \geq R_3$ となり矛盾。従って、任意の $t \geq 0$ で $|x(t)| \geq |y(t)|$. さて $|x| \geq |y|$ かつ $(x, y) \in \overline{B}(0, R_3)$ ならば、

$$|F(x,y)| \leq 2C_1 x^2 \leq \frac{1}{2}\alpha|x|. \tag{3.2.14}$$

さてある $t_1 \geq 0$ で $x(t_1) = 0$ とするとき、$|y(t_1)| = |x(t_1)| = 0$ となる。$t = t_1$ で 初期値 0 をとる（最大限に延長された）解は任意の $t \in \mathbb{R}$ で 0 であるので $x(t_*) \neq 0$ に矛盾する。従って任意の $t \geq 0$ で $x(t) \neq 0$ である。このとき (3.2.14) より

$$\frac{d}{dt}x^2 = 2x(-\alpha x + F(x,y)) \leq -\alpha x^2 < 0.$$

任意の $t \geq 0$ で上の不等式が成りたつので、$x(t)^2$ は単調減少で

$$x(t)^2 \leq e^{-\alpha t}x(0)^2$$

□

補題 3.2.9. $X : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ を (3.2.8) の解とする。いま $\sup_{t\in[0,\infty)} |X(t)| < +\infty$ ならば、$X(t) = (x(t), y(t))$ とおくとき、

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t}x(0) + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}F(x(s), y(s))ds \\ y(t) &= -e^{\beta t}\int_t^\infty e^{-\beta s}G(x(s), y(s))ds \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

証明. (3.2.8) の x 座標に $e^{\alpha t}$, y 座標に $e^{-\beta t}$ を掛けて積分すれば、

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}x(t) &= x(0) + \int_0^t e^{\alpha s}F(x(s), y(s))ds \\ e^{-\beta t}y(t) &= y(0) + \int_0^t e^{-\beta s}G(x(s), y(s))ds \end{aligned}$$

いま $X(t)$ は有界であるから、$t \to \infty$ で $e^{-\beta t}y(t) \to 0$. 従って、

$$y(0) = -\int_0^\infty e^{-\beta s}G(x(s), y(s))ds$$

これを上の式に代入すれば (3.2.15) が得られる。 □

$\lambda \in [0, \alpha]$ とする。$X : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ に対して

$$||X||_\lambda = \sup_{t \in [0,\infty)} e^{\lambda t}|X(t)|$$

とおく。また、$x_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{U}_{x_0}^\lambda = \{X | X : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2, X(t) = (x(t), y(t)), ||X||_\lambda \le 2|x_0|, x(0) = x_0\}$$

とおく。$X, Y \in \mathcal{U}_{x_0}^\lambda$ に対して $D_\lambda(X, Y) = ||X - Y||_\lambda$ とすると、$D_\lambda(X, Y)$ は $\mathcal{U}_{x_0}^\lambda$ の距離である。

次に $R > 0$ を十分小さく選ぶことで $R \le R_3/2$ かつ

$$\begin{aligned} 4C_1 R\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}} &\le \frac{1}{2} \\ \sqrt{\left(1 + \frac{4C_1}{\alpha}R\right)^2 + \left(\frac{4C_1}{\beta}\right)^2 R^2} &\le 2 \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

をみたすようできる。これから先は R は常に $R \le R_3/2$ かつ (3.2.16) を満たすものとする。

$0 < |x_0| \le R$ とする。$X \in \mathcal{U}_{x_0}^\lambda$ に対して、

$$\begin{aligned} \phi_{x_0}(X)(t) &= e^{-\alpha t}x_0 + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}F(X(s))ds \\ \psi_{x_0}(X)(t) &= -e^{\beta t}\int_t^\infty e^{-\beta s}G(X(s))ds \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

と定義する。さらに $\Phi_{x_0}(X)(t) = (\phi_{x_0}(X)(t), \psi_{x_0}(X)(t))$ とおく。

ここで $\lambda \in \{0, \alpha\}$ とする。このとき $\mathcal{U}_{x_0}^\alpha \subseteq \mathcal{U}_{x_0}^0$ である。

補題 3.2.10. $|x_0| \le R$ とする。
(1) $\lambda = 0, \alpha$ とする。任意の $X \in \mathcal{U}_{x_0}^\lambda$ に対して、$\Phi_{x_0}(X) \in \mathcal{U}_{x_0}^\lambda$. である。

(2) $\Phi_{x_0}(X) = X$ を満たす $\mathcal{U}_{x_0}^0$ の元 X がただ一つ存在する。その X を X_* とおき、$X_*(t) = (x_*(t), y_*(t))$ とする。$X_* \in \mathcal{U}_{x_0}^\alpha$ で、X_* は (3.2.8) の $t = 0$ で初期値 $(x_0, y_*(0))$ をもつ $[0, \infty)$ 上の解である。さらに任意の $t \geq 0$ で $|x_*(t)| \geq |y_*(t)|$, $|x_*(t)|$ は単調減少、$dx_*/dt \neq 0$,

$$\frac{1}{2}e^{-\alpha t}|x_0| \leq |x_*(t)| \leq \frac{3}{2}e^{-\alpha t}|x_0| \tag{3.2.18}$$

かつ

$$|y_*(t)| \leq \frac{4C_1}{\beta}(e^{-\alpha t}|x_0|)^2 \tag{3.2.19}$$

証明. $\lambda = 0, \alpha$ とする。
Step 1: $\lambda = 0, \alpha$, $X, Y \in \mathcal{U}_{x_0}^\lambda$ に対して

$$||\Phi_{x_0}(X) - \Phi_{x_0}(Y)||_\lambda \leq \frac{1}{2}||X - Y||_\lambda \tag{3.2.20}$$

Step 1 の証明

$$\begin{aligned}
&\left| e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\big(F(X(s)) - F(Y(s)\big)ds \right| \\
&\qquad \leq C_1 e^{-\alpha t}\int_0^t e^{(\alpha-2\lambda)s}e^{\lambda s}|X(s) - Y(s)|e^{\lambda s}(|X(s)| + |Y(s)|)ds \\
&\quad \leq C_1\frac{|e^{-2\lambda t} - e^{-\alpha t}|}{\alpha}||X - Y||_\lambda(||X||_\lambda + ||Y||_\lambda) \leq 4|x_0|C_1\frac{e^{-\lambda t}}{\alpha}||X - Y||_\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left| e^{\beta t}\int_t^\infty e^{-\beta s}\big(G(X(s)) - G(Y(s))\big)ds \right| \\
&\qquad \leq C_1 e^{\beta t}\int_t^\infty e^{-(\beta+2\lambda)s}e^{\lambda s}|X(s) - Y(s)|e^{\lambda s}(|X(s)| + |Y(s)|)ds \\
&\qquad \leq C_1\frac{e^{-2\lambda t}}{\beta + 2\lambda}||X - Y||_\lambda(||X||_\lambda + ||Y||_\lambda) \leq 4|x_0|C_1\frac{e^{-2\lambda t}}{\beta}||X - Y||_\lambda
\end{aligned}$$

従って、

$$e^{\lambda t}|\Phi_{x_0}(X)(t) - \Phi_{x_0}(Y)(t)| \leq 4C_1|x_0|\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}}||X - Y||_\lambda$$

(3.2.16) より (3.2.20) を得る。 $\square$
Step 2: $\lambda = 0, \alpha$, $X \in \mathcal{U}_{x_0}^\lambda$ ならば $\Phi_{x_0}(X) \in \mathcal{U}_{x_0}^\lambda$
Step 2 の証明 Step 1 の証明と同様の議論より

$$e^{-\alpha t}\left|\int_0^t e^{\alpha s}F(X(s))ds\right| \le C_1\frac{|e^{-2\lambda t}-e^{-\alpha t}|}{\alpha}||X||_\lambda^2 \le \frac{4C_1}{\alpha}|x_0|^2e^{-\lambda t} \quad (3.2.21)$$

$$e^{\beta t}\left|\int_t^\infty e^{-\beta s}G(X(s))ds\right| \le C_1\frac{1}{\beta}e^{-2\lambda t}||X||_\lambda^2 \le \frac{4C_1}{\beta}|x_0|^2e^{-2\lambda t} \quad (3.2.22)$$

よって

$$e^{\lambda t}|\phi(X)(t)| \le |x_0|\Big(1+\frac{4C_1}{\alpha}|x_0|\Big), e^{\lambda t}|\psi(X)(t)| \le \frac{4C_1}{\beta}|x_0|^2$$

(3.2.16) より

$$||\Phi_{x_0}(X)||_\lambda \le |x_0|\sqrt{\Big(1+\frac{4C_1}{\alpha}|x_0|\Big)^2+\Big(\frac{4C_1}{\beta}\Big)^2|x_0|^2} \le 2|x_0| \quad (3.2.23)$$

よって $\Phi_{x_0}(X) \in \mathcal{U}_{x_0}^\lambda$. $\square$
Step 1, Step 2 より Φ は $\mathcal{U}_{x_0}^\lambda$ からそれ自身への連続写像である。
Step 3: $\Phi_{x_0}(X_*) = X_*$ を満たす $X_* \in \mathcal{U}_{x_0}^\alpha$ が存在する。
Step 3 の証明 $X_0 = (e^{-\alpha t}x_0, 0)$ とおき、帰納的に $X_{n+1} = \Phi_{x_0}(X_n)$ と定義する。$n \le m$ ならば、(3.2.20) より

$$||X_m - X_n||_\lambda \le \sum_{i=n}^{m-1}||X_{i+1}-X_i||_\lambda \le \sum_{i=n}^{\infty}2^{-i}||X_1-X_0||_\lambda = 2^{-n+1}||X_1-X_0||_\lambda$$

従って各 $t \ge 0$ で $\{X_m(t)\}_{m\ge 0}$ は Cauchy 列である。その極限を $X_*(t)$ とおくとき、

$$||X_* - X_n||_\lambda \le 2^{-n+1}||X_1-X_0||_\lambda$$

より $n \to \infty$ で $\{X_n\}_{n\ge 0}$ は X_* に一様収束する。また $n \to \infty$ で $||X_n|| \to ||X||$ であるから、$X_* \in \mathcal{U}_{x_0}^\lambda$ であり $\Phi(X_*) = X_*$ をみたす。 $\square$
Step 4: $\Phi_{x_0}(X) = X$ をみたす $X \in \mathcal{U}_{x_0}^0$ はただ一つである。
Step 4 の証明 いま $X, Y \in \mathcal{U}_{x_0}^0$ で $\Phi_{x_0}(X) = X$ かつ $\Phi_{x_0}(Y) = Y$ とするとき (3.2.20) より $||X-Y||_\lambda = ||\Phi_{x_0}(X)-\Phi_{x_0}(Y)||_\lambda \le ||X-Y||_\lambda/2$. 従って $||X-Y||_\lambda = 0$. よって $X = Y$. $\square$

さて $\mathcal{U}^\alpha_{x_0} \subseteq \mathcal{U}^0_{x_0}$ であるから Step 3 で構成した $X_* \in \mathcal{U}^\alpha_{x_0}$ は $\mathcal{U}^0_{x_0}$ に属し、$\Phi_{x_0}(X_*) = X_*$. Step 4 より $X \in \mathcal{U}^0_{x_0}$ で $\Phi_{x_0}(X) = X$ を満たすものは X_* に限ることがわかる。次に $X_*(t) = (x_*(t), y_*(t))$ とおいてその性質を調べる。$X_* \in \mathcal{U}^\alpha_{x_0}$ より $|x_*(t)| \leq 2e^{-\alpha t}|x_0|$ が成り立つ。$R \leq R_3/2$ より $X_* : [0,\infty) \to \overline{B}(0, R_3)$ であり、X_* は

$$\begin{aligned} x_*(t) &= e^{-\alpha t}x_0 + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}F(x_*(s), y_*(s))ds \\ y_*(t) &= -e^{\beta t}\int_t^\infty e^{-\beta s}G(x_*(s), y_*(s))ds \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

を満たすので (3.2.8) の解である。補題 3.2.8 より、任意の $t > 0$ で $|x_*(t)| \geq |y_*(t)|$ であり、$\frac{d}{dt}x_* \neq 0$ かつ $|x_*(t)|$ は単調減少である。さて

$$F_*(t) = e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}F(X_*(s))ds$$

とおく。ここで (3.2.16) より、$4C_1R/\alpha \leq 1/2$. よって (3.2.21) で $\lambda = \alpha$ とすれば、

$$|F_*(t)| \leq \frac{4C_1}{\alpha}|x_0|^2 e^{-\alpha t} \leq \frac{|x_0|}{2}e^{-\alpha t}.$$

ここで $x_*(t) = e^{-\alpha t}x_0 + F_*(t)$ であるから (3.2.18)

$$\frac{1}{2}e^{-\alpha t}|x_0| \leq |x_*(t)| \leq \frac{3}{2}e^{-\alpha t}|x_0|$$

が $t \in [0,\infty)$ で成り立つ。一方 (3.2.22) で $\lambda = \alpha$ とすると、

$$|y_*(t)| \leq e^{\beta t}\left|\int_t^\infty G(X_*(s))ds\right| \leq \frac{4C_1}{\beta}|e^{-\alpha t}R|^2$$

従って (3.2.19) を得る。 □

定理 *3.2.5* の証明. $\rho = \pm R$ として、補題 3.2.10 を用いて $\Phi_\rho(X_*) = X_*$ を満たす $X_* \in \mathcal{U}^\alpha_\rho$ をとる。$X_*(t) = (x_*(t), y_*(t))$ とおく。X_* は (3.2.8) の解である。さらに任意の $t > 0$ で $|x_*(t)| \geq |y_*(t)|$ であり、$\frac{d}{dt}x_* \neq 0$ かつ $|x_*(t)|$ は単調減少である。$x_*(t)$ は C^1 級であるので、逆関数定理を用いれば $x_* : [0,\infty) \to [0, R]$ の逆関数 $\xi : [0, R] \to (0,\infty)$ は C^1 級である。$\varphi(x) = y_*(\xi(x))$ と定義すると、$x \neq 0$ では φ は C^1 級であり、

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dy_*}{dt}\Big/\frac{dx_*}{dt} = \frac{\beta y_* + G(x_*, y_*)}{-\alpha x_* + F(x_*, y_*)}$$

が成り立つ。ここで $\varphi(0)=0$ と定義する。
$\frac{d\varphi}{dx}(0)=0$ の証明： (3.2.18) と (3.2.19) より

$$\Big|\frac{\varphi(x_*)}{x_*}\Big| = \Big|\frac{y_*(t)}{x_*(t)}\Big| \le \frac{8C_1}{\beta}e^{-\alpha t}R$$

$x_* \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ より φ は $x=0$ で微分可能であり $\frac{d\varphi}{dx}(0)=0.$
$x=0$ で $d\varphi/dx$ が連続であること: (3.2.14) と (3.2.18) より、

$$\Big|\frac{dx_*}{dt}\Big| \ge \frac{\alpha}{2}|x| \ge \frac{\alpha}{4}e^{-\alpha t}R$$

また補題 3.2.6 と (3.2.19) より

$$\Big|\frac{dy_*}{dt}\Big| \le \beta|y| + C_1((x_*)^2+(y_*)^2) \le ce^{-2\alpha t}R$$

従って

$$|\frac{d\varphi}{dx}| = \Big|\frac{dy_*}{dt}\Big/\frac{dx_*}{dt}\Big| \le c'e^{-\alpha t}$$

これより $x \to 0$ で $d\varphi/dx \to 0$ となる。

さて、$|x_0| \le R$ とする。このとき、ある $t_0 \ge 0$ で $x_*(t_0)=x_0$ となる。ここで $X(t:x_0)=X_*(t-t_0), x(t:x_0)=x_*(t-t_0), y(t:x_0)=x_*(t-t_0)$ と定義すると、$X(t:x_0)$ は $t=0$ で初期値 $(x_0,\varphi(x_0)$ をとる (3.2.8) の $[0,\infty)$ 上の解である。このとき、$y(t:x_0)=\varphi\big(x(t:x_0)\big)$ をみたす。

$X(t):[0,\infty) \to \overline{B}(0,R)$ を $\sup_{t\in[0,\infty)}|X(t)| \le R$ をみたす (3.2.8) の解とする。$X(t)=(x(t),y(t))$, $x_0=x(0)$ とおく。補題 3.2.8 より任意の $t \in [0,\infty)$ で $|x(0)| \ge |x(t)| \ge |y(t)|$. 従って $|X(t)| \le \sqrt{2}|x(t)| \le \sqrt{2}|x_0|$. よって $X \in \mathcal{U}^0_{x_0}$. 補題 3.2.9 より $\Phi(X)=X$ である。上の議論より $Y \in \mathcal{U}^0_{x_0}$ で $\Phi(Y)=Y$ を満たすのはただ一つでありそれは $X(t:x_0)$ である。従って $X(t)=X(t:x_0)$. □

演習 1. $x:[0,T]\to\mathbb{R}$ は $[0,T]$ 上微分可能である。さらに $f:[0,T]\to\mathbb{R}, g:[0,T]\to\mathbb{R}$ は $[0,T]$ 上連続であるとする。任意の $t\in[0,T]$ に対して

$$\frac{dx}{dt}\le f(t)x(t)+g(t)$$

が成り立つとする。$F(t)=\int_0^t f(s)ds$ とするとき、任意の $t\in[0,T]$ で

$$x(t)\le e^{F(t)}x(0)+\int_0^t e^{F(t)-F(s)}g(s)ds$$

が成り立つことを示せ。

略解. 与えられた不等式より、

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-F(t)}x(t)\Big)=e^{-F(t)}\frac{dx}{dt}-e^{-F(t)}f(t)x(t)\le e^{-F(t)}g(t)$$

積分して

$$e^{-F(t)}x(t)-x(0)\le\int_0^t e^{-F(s)}g(s)ds$$

これを整理すれば題意の不等式を得る。 □

演習 2. $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ に対して x の Euclid のノルム $|x|_2$ を $|x|_2=\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}$ と定義する。 $||\cdot||$ を $\mathbb{R}^2$ のノルムとするとき、$|\cdot|_2$ と $||\cdot||$ は同値であることを示せ。

略解. 命題 2.1.5 の証明 □

演習 3. $L^1(\mathbb{N})=\{f|f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\sum_{i\in\mathbb{N}}|f(i)|<\infty\}$ とし、$f\in L^1(\mathbb{N})$ に対して $||f||=\sum_{i\in\mathbb{N}}|f(i)|$ と定義する。
(1) $||\cdot||$ は $L^2(\mathbb{N})$ のノルムであることを示せ。
(2) $f\in L^1(\mathbb{N})$ とする。 $Af:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ を任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $(Af)(n)=f(n+1)$ と定義するとき $Af\in L^1(\mathbb{N})$ であり、$A:L^1(\mathbb{N})\to L^1(\mathbb{N})$ は有界線型作用素であることを示せ。さらに A の作用素ノルム $||A||_{L^1(\mathbb{N})}$ の値を求めよ。
(3) $f\in L^1(\mathbb{N})$ とする。任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$(e^{tA}f)(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}f(n+m)$$

が成り立つことを示せ。

略解. (1)

$$||f+g|| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |f(i)+g(i)| \le \sum_{i\in\mathbb{N}} |f(i)|+|g(i)| \le ||f||+||g||$$

などノルムの性質を全て示す。
(2)

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |(Af)(i)| = \sum_{i\ge 2} |f(i)| \le ||f||$$

より $Af \in L^1(\mathbb{N})$ で $||Af|| \le ||f||$. $a_1 = 0$ のときは $||Af|| = ||f||$ であるから、$||A||_{L^1(\mathbb{N})} = 1$.
(3) $(A^m f)(n) = f(n+m)$ であり、$e^{tA}f = \sum_{j\ge 0} t^j A^j f$ より □

演習 4. a, b, c を実数とする。微分方程式

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

の任意の解が、ある実数 α, β に対して $x(t) = e^{-t}(\alpha+\beta t)$ と表されることはあり得るか？

略解. $y = \frac{dx}{dt}, z = \frac{dy}{dt}$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

上の 3 行 3 列の行列を A とおく。任意の解が $x(t) = e^{-t}(\alpha+\beta t)$ と書けることより、A は -1 のみを固有値とする。従って A の固有多項式は $(\lambda+1)^3$. これより $a = 3, b = 3, c = 1$ となる。このとき、A の固有値 1 に属する固有空間は $\begin{pmatrix} s \\ -s \\ s \end{pmatrix}$ でその次元は 1. 従って A の Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となり、微分方程式の解で $e^{-t}t^2$ の項を含むものが存在する。これは矛盾。 □

演習 5. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2$ 上 C^2 級であるとする。原点 $0=(0,0)$ は次の微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\end{aligned}$$

の定常点であるとする。原点 0 は安定ではないことを示せ。

略解. 原点における線型化は、$a=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0), b=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0), c=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

固有多項式は、

$$\lambda^2-a^2-bc=0$$

解は $a^2+bc>0$ なら正と負の 2 つ、$a^2+bc=0$ なら 0、$a^2+bc<0$ なら純虚数。よって原点は安定でない。 □

演習 6. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2$ 上 C^2 級であるとする。原点 $0=(0,0)$ は次の微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

の定常点であるとする。原点 0 が安定ならば、$f(x,y)$ は 0 で極小値をとることを示せ。

略解. 原点における線型化は、$a=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0), b=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0), c=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0)$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

固有多項式は、

$$(\lambda-a)(\lambda-c)-b^2=0$$

この解は実数である。ここで
安定 $\Leftrightarrow$ 固有多項式の解が全て負 $\Leftrightarrow$ 2 次形式

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

が負定置 $\Rightarrow f(x,y)$ が 0 で極小になる。 □

演習 7. 次の微分方程式について以下の問いに答えよ。

$$\frac{dx}{dt} = -x$$
$$\frac{dy}{dt} = y - x^3,$$

(1) 原点 $0 = (0, 0)$ は双曲的な定常点であることを示せ。
(2) 原点における安定多様体を求めよ。

略解. (1) 原点における線型化の固有値は $1, -1$
(2) 方程式を解くと

$$x(t) = x_0 e^{-t}$$
$$y(t) = (y_0 - \frac{1}{4}(x_0)^3)e^t + \frac{(x_0)^3}{4}e^{-3t}$$

従って安定多様体は、$y = \dfrac{x^3}{4}$. □

演習 8. 次の微分方程式について以下の問いに答えよ。

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - x$$

(1) 定常点を全て求め、それらが安定であるかどうかを調べよ。
(2) $0 < x_0 < 1$ とする。$t = 0$ で初期値 x_0 をとる解を $x(t)$ とする。$x(t)$ が $[0, T)$ 上定義されているとするとき、任意の $t \in [0, T)$ で $x(t) \in (0, x_0]$ であり、$\alpha = x_0(1 - (x_0)^2)$ とおくと、$x'(t) \leq -\alpha x(t)$ が成り立つことを示せ。
(3) $0 < x_0 < 1$ とする。$t = 0$ で初期値 x_0 をとる解 $x(t)$ は $[0, \infty)$ 上存在し、$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ となることを示せ。

略解. (1) 定常点は $x = -1, 0, 1$. $-1, 1$ は安定でない。0 は安定。
(2) (i) 任意の $t \in [0, T)$ で $x(t) > 0$.
(i) の証明：任意の t で $x_*(t) = 0$ とする。x_* は解である。ある t_* で $x(t_*) = 0$ とするとき、$x_*(t_*) = x(t_*)$ であり、$t = t_*$ で 0 をとる解の一意性より $x(t) = x_*(t)$。これは $x(0) = x_0 > 0$ に矛盾
(ii) 任意の $t \in [0, T)$ で $0 < x(t) < x_0$.
(ii) の証明：ある $T_* \in (0, T)$ で $x(T_*) > x_0$ とする。$T_1 = \inf\{t | t \in [0, T), x(t) \geq x_0\}$ とおく。$x(0) = x_0 < 1$ で $x(t)$ は連続なので $T_1 > 0$。(i) より $0 \leq t \leq T_1$ で $x(t) \in (0, x_0)$ なので、$x'(t) = x(t)(x(t)^2 - 1) < 0$。従って $[0, T_1]$ 上で $x(t)$

は単調減少であり、$x(T_1) \le x_0 < 1$。 これは $x(T_1) = x_0$ に矛盾。従って任意の $t \in [0, T)$ で $x(t) < x_0$。
(i), (ii) より任意の $t \in (0, T]$ で $x(t) \in (0, x_0]$. いま $x \in (0, x_0]$ ならば、

$$x(x^2 - 1) \le -\alpha x$$

(3) $T < +\infty$ とすると、$t \uparrow T$ で解は爆発する。ところが、(2) より任意の $t \in [0, T)$ で $x(t) \in (0, x_0]$. 従って $T = \infty$. (2) より $\frac{dx}{dt} \le -\alpha x$. よって、$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} x) \le 0$. これより、

$$x(t) \le e^{-\alpha t} x_0$$

従って $0 < x(t) \le e^{-\alpha t} x_0$. よって $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

$\square$