線形代数学 A 演習 2 略解

演習 1. $p(x), q(x) \in T_3(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}(F(p+q))(x) &= (x+1)(p+q)'(x)\\ &= (x+1)p'(x) + (x+1)q'(x)\\ &= (F(p))(x) + (F(q))(x),\\ (F(\alpha p))(x) &= (x+1)(\alpha p)'(x)\\ &= \alpha(x+1)p'(x)\\ &= \alpha(F(p))(x)\end{aligned}$$

が成立する．よって，$F\colon T_3(\mathbb{R}) \to T_3(\mathbb{R})$ は linear map である．また，F の定義より，

$$\begin{aligned}(F(1))(x) &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3,\\ (F(x))(x) &= 1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3,\\ (F(x^2))(x) &= 0\cdot 1 + 2\cdot x + 2\cdot x^2 + 0\cdot x^3,\\ (F(x^3))(x) &= 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2 + 3\cdot x^3\end{aligned}$$

が得られるので，F を $(1, x, x^2, x^3)$ に関して表現する行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である．

演習 2. f が満たす問題の式と f の線形性より，

$$\begin{aligned}-f(e_1) + f(e_3) &= e_1\\ f(e_2) &= e_1 + e_2 + e_3\\ -f(e_1) + f(e_2) + 2f(e_3) &= 3e_1 + 3e_2 + 4e_3\end{aligned}$$

が得られるので，

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

がわかる．よって，f を (e_1, e_2, e_3) に関して表現する行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

である．

演習 3.

$$\ker f = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

より，$\dim \ker f$ は 1．次元定理より，$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 4$ なので，$\dim \operatorname{Im} f$ は 3.

演習 4. まず，$\operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$ を示す．任意の $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$ に対して，$x = 0$ を示せばよい．$x \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$ とする．$x \in \operatorname{Im} f$ より，$x = f(y)$ を満たす $y \in U$ が存在する．$g \circ f = I_U$ より，$g(x) = g(f(y)) = y$ となり，$g(x) = y$ が得られる．また，$x \in \ker g$ より，$g(x) = 0$ なので，$y = 0$ がわかる．ここで，f の線形性より，$f(0) = 0$ が成立するので，$x = f(y) = f(0) = 0$ が得られる．よって，$x = 0$.

次に，$V = \operatorname{Im} f + \ker g$ を示す．$V \supset \operatorname{Im} f + \ker g$ は明らかなので，$V \subset \operatorname{Im} f + \ker g$ を示せばよい．任意の $x \in V$ に対して，$x_1 = x - f(g(x))$, $x_2 = f(g(x))$ とおく．$x_1 \in \ker g$ かつ $x_2 \in \operatorname{Im} f$ が得られれば，$x = x_2 + x_1 \in \operatorname{Im} f + \ker g$ なので，$V \subset \operatorname{Im} f + \ker g$ が示される．$x_2 \in \operatorname{Im} f$ は明らかなので，$x_1 \in \ker g$ を示す．g の線形性と $g \circ f = I_U$ より，$g(x_1) = g(x) - g(f(g(x))) = g(x) - (g \circ f)(g(x)) = g(x) - g(x) = 0$．よって，$x_1 \in \ker g$.

演習 5.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$$

とする．

(1) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ なので，$\ker A = \{\mathbf{0}\}$．よって，A は可逆.

(2)

$$\ker A = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

より，$\ker A \neq \{\mathbf{0}\}$．よって，$A$ は可逆でない.

(3) (1) と同様にして $\ker A = \{\mathbf{0}\}$ がわかるので，A は可逆.

補足. ここでは x_1, x_2, x_3 に関する連立方程式を解き，$\ker A$ を求めることで，A の可逆性を得たが，$\ker A$ を求めずに A の rank を直接計算することで，A の可逆性を求めてもよい.

演習 6. (1) 3，(2) 3，(3) $a = 1$ のとき，rank は 1，$a = -3$ のとき，rank は 3，$a \neq 1, -3$ のとき，rank は 4.