線形代数学

木上　淳
京都大学大学院情報学研究科
e-mail：kigami@i.kyoto-u.ac.jp

July 18, 2014

Contents

Chapter 1

ベクトル空間

1.1　ベクトル空間の定義

例 1.1.1. $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ とする。

$$K^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\middle| x_1,\cdots,x_n\in K\right\}$$

$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in K^n$ に対して和 $x+y\in K^n$ を $x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}$。

スカラー $\alpha\in K$ に対して $\alpha x\in K^n$ を $\alpha x=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\ \vdots\\ \alpha x_n\end{pmatrix}$ と定義する。

ベクトル空間 = たし算と定数倍が定義されている集合
定数 = 実数 $\mathbb{R}$ または複素数 $\mathbb{C}$ （一般には可換体）

定義 1.1.2. $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ とする。集合 U が K-ベクトル空間 (K-vector space) であるとは、任意の $u,v\in U$ に対して $u+v$, 任意の $\alpha\in K$ および任意の $u\in U$ に対して $\alpha\cdot u$ が決まって次の (V1) から (V7) の性質を満たすこと、

(V1) $a,b,c\in U\Rightarrow(a+b)+c=a+(b+c)$

(V2) $a,b\in U\Rightarrow a+b=b+a$

(V3) ある $0 \in U$ があって任意の $a \in U$ に対して $a+0=a$

　0 を零ベクトル (zero vector) という。

(V4) 任意の $a \in U$ に対してある $x \in U$ があり $a+x=0$.（すなわちたし算にかんする逆元の存在）

(V5) 任意の $a \in U$ に対して $1 \cdot a = a$. ただし $1 \in K$.

(V6) 任意の $a, b \in U$, 任意の $\alpha \in K$ に対して $\alpha \cdot (a+b) = (\alpha \cdot a) + (\alpha \cdot b)$.

(V7) 任意の $a \in U$, 任意の $\alpha, \beta \in K$ に対して $(\alpha+\beta) \cdot a = (\alpha \cdot a) + (\beta \cdot a), (\alpha\beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$

　$u, v \in U$ に対して $u+v$ を u と v の和、$\alpha \in K$, $u \in U$ に対して $\alpha \cdot u$ を u の定数倍（スカラー倍）という。$\alpha \cdot u$ を αu と書く。

注意. U がベクトル空間ならば、任意の $u \in U$ に対して $0 \cdot u = 0$

　$(0 \cdot u) + (0 \cdot u) = (0+0) \cdot u = 0 \cdot u$ より

例 1.1.3. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。

(1) $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$-vector space, $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$-vetor space

(2) $\mathrm{T}_n(K) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n | a_0, a_1, \cdots, a_n \in K\}$ とする。$\mathrm{T}_n(K)$ は K を係数とする x の n 次以下の多項式の全体。$\mathrm{T}_n(K)$ は K-vector space.

(3) $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f$ は連続$\}$ とする。$C([0,1])$ は $[0,1]$ 区間上の（実数値）連続関数の全体。$C([0,1])$ は $\mathbb{R}$-vector space.

(4) $M_{m,n}(K) = K$ を要素とする m 行 n 列の行列の全体

$$M_{m,n}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \text{ に対して } a_{ij} \in K \right\}$$

1.2　ベクトル空間の基底

$\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^2$ を考える。$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき任意の $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

となる。つまりすべてのベクトルを e_1, e_2 を用いて表すことができる。

次に $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする。このとき、任意のベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\frac{x_1 + x_2}{2})f_1 + (\frac{x_1 - x_2}{2})f_2$$

のように f_1, f_2 を用いて表すことができる。このようなベクトルの組 (e_1, e_2) や (f_1, f_2) をベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の基底とよぶ。

(e_1, e_2, f_1) を用いて任意のベクトルを表すことができるが、この場合たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 = e_2 + f_1$$

のように表し方が一通りではない。

定義 1.2.1 (基底)**.** $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。U を K-vector space、$e_1, \cdots, e_n \in U$ とする。

(1) $(e_1, \cdots, e_n)$ が 1 次独立 (linearly independent) であるとは、任意の $x_1, \cdots, x_n \in K$ に対して $x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = 0$ ならば $x_1 = \cdots = x_n = 0$ が成り立つことである。

(2) $(e_1, \cdots, e_n)$ が U の基底 (base, basis) を成すとは、次の (B1), (B2) が成り立つことである。
(B1) $(e_1, \cdots, e_n)$ は 1 次独立
(B2) 任意の $x \in U$ に対してある $x_1, \cdots, x_n \in K$ があって、$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ と書ける。

(B2) における $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ を基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する x の座標という。

注意. $(e_1, \cdots, e_n)$ が U の基底ならば、$x \in U$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標は一通りに定まる。実際 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ が共に $x \in U$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標であるとするとき

$$x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$$

したがって

$$(x_1 - y_1)e_1 + \cdots + (x_n - y_n)e_n = 0$$

$(e_1, \cdots, e_n)$ は 1 次独立なので $x_1 - y_1 = \cdots = x_n - y_n = 0.$

例 1.2.2. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。

(1) K-vector space K^n において

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき $(e_1, \cdots, e_n)$ は K^n の基底

(2) $\mathrm{T}_n(K)$ において $(1, x, x^2, \cdots, x^n)$ は基底

(3) $M_{m,n}(K)$ において、$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ となる i, j に対して $A(i,j) \in M_{m,n}(K)$ を (i,j)-成分が 1 でその他の成分はすべて 0 であるようなものと定める。このとき $(A(i,j) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m)$ は $M_{m,n}(K)$ の基底である。

注意. 有限個のベクトルからなる基底を持たないベクトル空間もある。

$$\mathrm{T}(\mathbb{R}) = \text{実数係数の } x \text{ の多項式の全体}$$

とする。$f_1, \cdots, f_m \in \mathrm{T}(\mathbb{R})$ とするとき $f_1, \cdots, f_m$ の次数の最大を N としておく。このとき任意の $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m \in \mathrm{T}(\mathbb{R})$ の次数は高々 N である。従って、$(f_1 \cdots, f_m)$ は $\mathrm{T}(\mathbb{R})$ の基底にはなれない。

例題 1.2.3. $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^3$ の元 f_1, f_2, f_3 を

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えるとき (f_1, f_2, f_3) は $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ。

解答. 任意の $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$x = (x_1 - x_2) f_1 + (x_2 - x_3) f_2 + x_3 f_3$$

が成り立つ。さらに $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ に対して $k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 = 0$ とするとき、

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 \\ k_2 + k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ となり (f_1, f_2, f_3) は 1 次独立である。 □

例題 1.2.4. $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R}^3$ を

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする。(g_1, g_2, g_3) は $\mathbb{R}^3$ の基底になるか？

解答. いま $g_1 - g_2 - g_3 = 0$ より (g_1, g_2, g_3) は 1 次独立ではない。 $\square$

演習 1.1. $\mathbb{C} = \{\alpha + \beta i | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ は、$k \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ に対して通常の積 kz でスカラー倍を定義するとき、$\mathbb{R}$-vector space となることを示せ。さらに、$(1, i)$ は $\mathbb{R}$-vector space としての $\mathbb{C}$ の基底であることを示せ。

演習 1.2. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

で与える。このとき (a_1, a_2, a_3) は $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ。さらに、$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の (a_1, a_2, a_3) に関する座標を求めよ。

1.3 ベクトル空間の次元

定理 1.3.1. *U を vetor space, $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底とする。このとき $m > n$ に対して、$f_1, \cdots, f_m \in U$ とするとき $(f_1, \cdots, f_m)$ は 1 次独立ではない。*

系 1.3.2. *U を vector space, $(e_1, \cdots, e_n)$ および $(f_1, \cdots, f_m)$ を U の基底とするとき $m = n$.*

定義 1.3.3. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. U を K-vector space とする。U が（有限個の元からなる）基底をもつとき U を有限次元 vector space という。そして $(e_1, \cdots, e_n)$ が U の基底であるとき n を vector space U の（K 上の）次元 (dimension) と呼び $n = \dim_K U$ と書く。暗黙のうちに K がわかっているときは $\dim_K U$ のかわりに $\dim U$ を用いることもある。

注意. vetor space U が有限個のベクトルからなる基底を持たないときは、U は無限次元のベクトル空間という。1.2 の $T(\mathbb{R})$ は無限次元のベクトル空間の例である。

例 1.3.4. (1) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.

(2) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n, \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

(3) $\dim_K \mathrm{T}_n(K) = n + 1$.

(4) $\dim_K M_{m,n}(K) = mn$.

定理 1.3.1 の証明のための準備をする。

補題 1.3.5. *U を vector space、$e_1, \cdots, e_n \in U$ とする。このとき次の 3つの条件は同値である。*

(1) $(e_1, \cdots, e_n)$ は 1 次独立である。

(2) $\pi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ を一対一の写像とするとき $(e_{\pi(1)}, \cdots, e_{\pi(n)})$ は 1 次独立である。

(3) $\alpha, \beta \in K, \alpha \neq 0,\ i, j \in \{1, \cdots, n\}, i \neq j$ に対して e_i を $\alpha e_i + \beta e_j$ に置き換えたものが 1 次独立である。

例題 1.3.6. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ は 1 次独立か？

解答. 補題 1.3.5 の操作を繰り返して 1 次独立かどうかが明らかな形に変形する。

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 17 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[1c-3c]{4c-3c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -12 & 4 & 17 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3c-2\times 1c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ -12 & 4 & 41 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{4c+3\times 2c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ -12 & 4 & 41 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4c-3c)/(-34)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -12 & 4 & 41 & 1 \end{pmatrix}$$

これより与えられた4つのベクトルは1次独立である。 □

演習 1.3.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とおく。(f_1, f_2, f_3, f_4) は $\mathbb{R}^4$ で1次独立か？

補題 1.3.7. $K = \mathbb{R}$ *or* $\mathbb{C}$ とする。K^n の $n+1$ 個のベクトルは1次独立ではない。

証明. n に関する数学的帰納法を用いる。
$n = 1$ のとき、$a_1, a_2 \in K$ とする。$a_2 = 0$ ならば $0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = 0$、$a_2 \neq 0$ ならば $1 \cdot a_1 + (-a_1/a_2) \cdot a_2 = 0$. 従って (a_1, a_2) は1次独立ではない。
$n-1$ まで成立したとする。すなわち K^{n-1} の n 個のベクトルは1次独立ではない。いま $a_1, \cdots, a_{n+1} \in K^n$ で $i = 1, \cdots, n+1$ で $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ とする。

Case 1　すべての i に対して $a_{ni} = 0$ ならば $\tilde{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{n-1\,i} \end{pmatrix} \in K^{n-1}$ とおく。$(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_{n+1})$ は帰納法の仮定より1次独立でない。従って $(a_1, \cdots, a_{n+1})$ も1次独立でない。
Case 2　ある i で $a_{ni} \neq 0$ のとき、補題 1.3.5 の操作を Step 1, Step 2, Step 3 以下のように繰り返す。
Step 1　a_{n+1} と a_i を入れ換えて、$a_{n\,n+1} \neq 0$ としてよい。
Step 2　次に a_{n+1} を $a_{n\,n+1}$ で割ることにより、$a_{n\,n+1} = 1$ としてよい。
Step 3　さらに $i = 1, \cdots, n$ に対して a_i を $a_i - a_{ni} \times a_{n+1}$ で置き換えることで、$a_{ni} = 0$ が $i = 1, \cdots, n$ で成り立つとしてよい。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1i} & & a_{1\,n+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{ni} \neq 0 & & a_{n\,n+1} \end{pmatrix} \xrightarrow[a_i \leftrightarrow a_{n+1}]{\text{Step 1}} \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1\,n+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{n\,n+1} \neq 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[a_{n+1}/a_{nn+1}]{\text{Step 2}} \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1\,n+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[a_i - a_{ni} \times a_{n+1}]{\text{Step 3}} \begin{pmatrix} & & & a_{1\,n+1} \\ \tilde{a}_1 & \cdots & \tilde{a}_n & \vdots \\ & & & a_{n-1\,n+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで $\tilde{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{n-1\,i} \end{pmatrix} \in K^{n-1}$ とすると $(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n)$ は帰納法の仮定より 1 次独立でない。従って $(a_1, \cdots, a_{n+1})$ は 1 次独立でない。 □

定理 *1.3.1* の証明. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ として、U は K-vector space とする。いま $m = n + 1$ としても一般性を失わない。f_i の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in K^n$ とする。このとき

U で $(f_1, \cdots, f_{n+1})$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow$ K^n で $(a_1, \cdots, a_{n+1})$ が 1 次独立

補題 1.3.7 より $(f_1, \cdots, f_{n+1})$ は 1 次独立でない。 □

定義 1.3.8. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. U を K-vector space とする。$f_1, \cdots, f_m \in U$ に対して、

$$\langle f_1, \cdots, f_m \rangle = \{u \mid \text{ある } k_1, \cdots, k_m \in K \text{ に対して } u = k_1 f_1 + \cdots + k_m f_m\}$$

この定義より、すぐに次の補題が得られる。

補題 1.3.9. *U を vector space とするとき、$f_1, \cdots, f_n \in U$ に対して、*

$(f_1, \cdots, f_n)$ が U の基底 $\Leftrightarrow$ $(f_1, \cdots, f_n)$ は 1 次独立かつ $U = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$.

補題 1.3.10. *U を vector space, $f_1, \cdots, f_m \in U$ であり $(f_1, \cdots, f_m)$ は 1 次独立であるとする。いま $u \in U$ が $u \notin \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$ をみたすならば、$(f_1, \cdots, f_m, u)$ は 1 次独立である。*

証明. $k_1, \cdots, k_m, k \in K$ に対して、$k_1 f_1 + \cdots + k_m f_m + ku = 0$ とする。このとき $u \notin \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$ より $k = 0$. ここで $(f_1, \cdots, f_m)$ は1次独立であるから $k_1 = \cdots = k_m = 0$. 従って $(f_1, \cdots, f_m, u)$ は1次独立。 $\square$

補題 1.3.11. U を有限次元の *vector space*, $\dim U = n$ とする。いま $f_1, \cdots, f_n \in U$ で $(f_1, \cdots, f_n)$ が1次独立ならば $(f_1, \cdots, f_n)$ は U の基底である。

証明. ある $u \in U$ で $u \notin \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ とするとき $(f_1, \cdots, f_n, u)$ は1次独立。これは定理 1.3.1 に反する。従って $U = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$. 補題 1.3.9 より $(f_1, \cdots, f_n)$ は基底である。 $\square$

定理 1.3.12. U を有限次元の *vector space*, $\dim U = n$ とする。このとき $m < n$ に対して $f_1, \cdots, f_m \in U$ かつ $(f_1, \cdots, f_m)$ は1次独立であるとする。このときある $f_{m+1}, \cdots, f_n \in U$ がとれて、$(f_1, \cdots, f_n)$ が U の基底となるようにできる。

証明. $m < n$ であるから定理 1.3.1 より $(f_1, \cdots, f_m)$ は U の基底ではない。従って補題 1.3.9 より $U \neq \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$. すなわちある $u \in U$ で $u \notin \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$. 補題 1.3.10 より $(f_1, \cdots, f_m, u)$ は1次独立である。$u = f_{m+1}$ とする。この操作を繰り返すことで $f_{m+1}, \cdots, f_n \in U$ を $(f_1, \cdots, f_n)$ が1次独立となるように選ぶことができる。ここで補題 1.3.11 より $(f_1, \cdots, f_n)$ は U の基底となる。 $\square$

例題 1.3.13. $k \in \mathbb{R}$ に対して $f_1(x) = (1-k) + 2x + 4x^2, f_2(x) = -4 + (7-k)x + 10x^2, f_3(x) = -2 + 4x + (6+k)x^2$ とする。(f_1, f_2, f_3) が $\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ の基底となるための k に関する必要十分条件を求めよ。

解答. $\dim \mathrm{T}_2(\mathbb{R}) = 3$ であるので、補題 1.3.11 より (f_1, f_2, f_3) が1次独立 $\Leftrightarrow$ (f_1, f_2, f_3) が $\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ の基底。いま f_1, f_2, f_3 の $(1, x, x^2)$ に関する座標を考える。

$$\begin{pmatrix} 1-k & -4 & -2 \\ 2 & 7-k & 4 \\ 4 & 10 & 6+k \end{pmatrix} \xrightarrow{2c-2\times 3c} \begin{pmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 2 & -(k+1) & 4 \\ 4 & -2(k+1) & 6+k \end{pmatrix}$$

$k = -1$ のとき2列目は0であるので1次独立でない。$k \neq -1$ のときは2列目を $-(k+1)$ で割っておく。

$$\begin{pmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 6+k \end{pmatrix} \xrightarrow[1c-2\times 2c]{3c-4\times 2c} \begin{pmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 \end{pmatrix}$$

$k=1$ のとき 1 列目は 0 であるので 1 次独立でない。$k \neq 1$ のときは 1 列目を $1-k$ で割っておく。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3c+2\times 1c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 \end{pmatrix}$$

$k=2$ のときは 3 列目が 0 であるので 1 次独立ではない。$k \neq 2$ のときは 3 列目を $k-2$ で割っておけば 1 次独立であることがわかる。以上より (f_1, f_2, f_3) が基底になるための必要十分条件は $k \notin \{-1, 1, 2\}$. □

1.4 部分ベクトル空間

定義 1.4.1. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, U を K-vector space とする。このとき $V \subseteq U$ が U の部分ベクトル空間 (subspace) であるとは、

(1) 任意の $u, v \in V$ に対して $u + v \in U$,

(2) 任意の $k \in K$, 任意の $u \in V$ に対して $ku \in V$

が成り立つことである。

この定義より次の命題は明らかである。

命題 1.4.2. *U を K-vector space, $V \subseteq U$ を U の subspace とするとき、V は U の和および定数倍（を V に制限したもの）に関して K-vector space である。*

さらに $\langle \cdot \rangle$ の定義（定義 1.3.8）より次の命題も明らかである。

命題 1.4.3. *U を vector space, $a_1, \cdots, a_m \in U$ とする。このとき $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ は U の subspace である。$\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ を $(a_1, \cdots, a_m)$ で生成される U の subspace という。*

例 1.4.4. (1) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + 3y = z \right\}$ とする。このとき V は $\mathbb{R}^3$ の subspace である。また $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ である。

(2) $\mathbb{R}^3 \supset V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x \geq y \geq z \right\}$ とする。このとき V は $\mathbb{R}^3$ の subspace ではない。実際、$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ であるが、$-\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin V$.

(3) $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ の部分集合と考える。このとき $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$-vector space と見なすときは $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ の subspace である。しかしながら、$\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$-vector space と見なすときは $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ の subspace ではない。

(4) 例 1.1.3-(3) で定義された $\mathbb{R}$-vector space $C([0,1])$ の部分集合 V を $V = \{f | f \in C([0,1]), \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ とする。このとき V は $C([0,1])$ の subspace である。

定理 1.4.5. *U を vector space, $a_1, \cdots, a_m \in U$ で少なくとも一つの $a_i \neq 0$ とする。このときある $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$ で $(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ が $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ の基底となるものが存在する。特に $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ は有限次元 vector space である。*

証明.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \{(a_{j_1}, \cdots, a_{j_l}) | 1 \leq l \leq m, 1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq m, \\ (a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}) \text{ は 1 次独立} \} \end{aligned}$$

とする。$\mathcal{B}$ はたかだか有限集合である。また、$a_i \neq 0$ となる a_i に対して $(a_i) \in \mathcal{B}$ より $\mathcal{B}$ は空集合でない。ここで $\mathcal{B}$ の元のうち l が最大であるようなものを、$(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ とする。(すなわち k が l の最大値) ここで $i_1, \cdots, i_k$ に入らない i に対して、$(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}, a_i)$ は 1 次独立ではないので、ある $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha$ があって

$$\alpha_1 a_{i_1} + \cdots + \alpha_k a_{i_k} + \alpha a_i = 0$$

かつ $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha) \neq (0, \cdots, 0, 0)$. いま $\alpha = 0$ とするとき $(a_{i_1} \cdots, a_{i_k})$ は 1 次独立より $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) = (0, \cdots, 0)$. これは矛盾。従って $\alpha \neq 0$. これより $a_i = (\alpha_1/\alpha)a_{i_1} + \cdots + (\alpha_k/\alpha)a_{i_k}$ となるので $a_i \in \langle a_{i_1}, \cdots, a_{i_k} \rangle$. よって $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle = \langle a_{i_1}, \cdots, a_{i_k} \rangle$. ゆえに $(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ は $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ の基底である。 □

上の定理（の証明）より

$$\begin{aligned} \dim \langle a_1, \cdots, a_m \rangle &= a_1, \cdots, a_m \text{ から選ぶことができる} \\ &\qquad \text{1 次独立なベクトルの組の含むベクトルの数の最大値} \leq m \end{aligned}$$

定義 1.4.6. U を vector space, $a_1, \cdots, a_m \in U$ とする。このとき $(a_1, \cdots, a_m)$ の階数 (rank), $\operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_m)$ を

$$\operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_m) = \dim \langle a_1, \cdots, a_m \rangle$$

と定義する。

$\operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_m) \leq m$ である。

命題 1.4.7 (rank の計算:列に関する基本変形)**.** *U を K-vector space, $a_1, \cdots, a_m \in U$ とする。*

(1) $\pi : \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, m\}$ を一対一の写像とするとき、

$$\operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_m) = \operatorname{rank}(a_{\pi(1)}, \cdots, a_{\pi(m)}).$$

(2) $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq 0$, $i \neq j$ に対して、

$$\operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_m) = \operatorname{rank}(a_1, \cdots, \alpha a_i + \beta a_j, \cdots, a_m).$$

例題 1.4.8. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}^4$ をそれぞれ、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。$\operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_5)$ を求めよ。

解答.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2c-3\times 1c, 4c-1c]{5c-3\times 1c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[1c-3c, 2c+3c]{(4c-3c)/8, 5c+3\times 3c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[1c-3\times 8c, 3c+4\times 8c]{4c+8\times 3c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより $\operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_5) = 3$ $\square$

演習 1.4. $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき $\operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_4)$ を求めよ。

演習 1.5. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}^4$ をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき $\operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_5)$ を求めよ。さらに $(a_1, \cdots, a_5)$ の中から適当に選んで、$\langle a_1, \cdots, a_5 \rangle$ の基底を作れ。

定理 1.4.9. *U を有限次元 vector space, V を U の subspace とする。このとき V も有限次元であり、$\dim V \leq \dim U$.*

証明. $\dim U = n$ とする。いま、

$$\mathcal{A} = \{(f_1, \cdots, f_m) | f_1, \cdots, f_m \in V, (f_1, \cdots, f_m) \text{ は 1 次独立} \}$$

とすると、定理 1.3.1 より $(f_1, \cdots, f_m) \in \mathcal{A}$ ならば $m \leq n$. 従って $\{m | (f_1, \cdots, f_m) \in \mathcal{A}\}$ は最大値をもつ。その最大値を k として、$(a_1, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}$ を選ぶ. もしある $a \in V$ に対して、$a \notin \langle a_1, \cdots, a_k \rangle$ ならば補題 1.3.10 より $(a_1, \cdots, a_k, a)$ は 1 次独立である。これは k の取り方に矛盾するので、$V = \langle a_1, \cdots, a_k \rangle$. 従って $(a_1, \cdots, a_k)$ は V の基底となり、$\dim V = k$. □

定理 1.4.10. *U を vector space, V_1, V_2 を U の subspaces とする。このとき、*

$$V_1 + V_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$$

とすれば、$V_1 + V_2$ は U の subspace である。さらに

(1) $V_1 + V_2$ は $V_1 \cup V_2$ を含む U の subspaces のうち最小のものである。

(2) $V_1 + V_2$ が有限次元のとき、

$$\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$$

証明. (2) 以外は明らか。いま $V_1 \cap V_2$ の基底を $(e_1, \cdots, e_k)$ とする。このとき、定理 1.3.12 よりある $a_1, \cdots, a_n \in V_1, b_1, \cdots, b_m \in V_2$ で $(e_1, \cdots, e_k, a_1, \cdots, a_n)$, $(e_1, \cdots, e_k, b_1, \cdots, b_m)$ がそれぞれ V_1, V_2 の基底となるものが存在する。ここで $V_1 + V_1 = \langle e_1, \cdots, e_k, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \rangle$. さて、

$$\gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_k e_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m = 0$$

とし、

$$x = \gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_k e_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = -(\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m)$$

とおく。このとき $x \in V_1 \cap V_2$ より $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$. したがって $x = 0$. これより $\gamma_1 = \cdots = \gamma_k = 0$. 以上より $(e_1, \cdots, e_k, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m)$ は 1 次独立であり、$V_1 + V_2$ の基底となる。よって $\dim V_1 + V_2 = k + m + n = (n+k) + (m+k) - k = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$. □

系 1.4.11. U を *vector space*, V_1, V_2 を U の *subspaces* とする。このとき次の (1), (2) は同値である。

(1) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

(2) 任意の $x \in V_1 + V_2$ に対して、$(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ がただ一組あって $x = x_1 + x_2$.

さらに $V_1 + V_2$ が有限次元ならば (1), (2) は次の (3) とも同値である。

(3) $\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$

証明. (1) ⇒ (2): $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V_1 \times V_2$ で $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ とするとき、$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in V_1 \cap V_2$ より $x_1 = y_1, x_2 = y_2$
(2) ⇒ (1): $x \in V_1 \cap V_2$ とする。このとき $(x, 0), (0, x) \in V_1 \times V_2$ である。(2) より $(x, 0) = (0, x)$. よって $x = 0$.
(1) ⇔ (3) は定理 1.4.10-(2) より明らか。 □

定義 1.4.12. 系 1.4.11 の状況のとき $V_1 + V_2$ を $V_1 \oplus V_2$ と書き V_1 と V_2 の直和と呼ぶ。

演習 1.6. 次の (1), (2) について、$V \subset U$ は U の subspace であることを示し、さらにその基底を一組求めよ。

(1) $U = \mathbb{R}^4$ and

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1 + 2x_2 = 0, x_1 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

(2) $U = T_3(\mathbb{R})$ and $V = \{f | \int_0^1 f(x)dx = 0\}$

Chapter 2

１次変換、行列

2.1　１次変換と行列

定義 2.1.1. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ として U, V を K-vector space とする。いま $f : U \to V$ が 1 次変換（線形変換、linear transformation, linear map）であるとは、

(L1) 任意の $x, y \in U$ に対して $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

(L2) 任意の $x \in U$, 任意の $k \in K$ に対して $f(kx) = kf(x)$

が成り立つことである。

命題 2.1.2. *$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とし、U, V を K-vector space とする。いま*

$$L(U, V) = U \text{ から } V \text{ への } \textit{linear map} \text{ の全体}$$

とする。このとき $f, g \in L(U, V)$ に対して、$f + g : U \to V$ を、任意の $x \in U$ に対して $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ と定義するとき $f + g \in L(U, V)$ である。また $k \in K, f \in L(U, V)$ に対して $kf : U \to V$ を、任意の $x \in U$ に対して $(kf)(x) = kf(x)$ と定義するとき $kf \in L(U, V)$ である。さらにこの和と定数倍の演算に関して $L(U, V)$ は K-vector space になる。

$U = V$ のとき $L(U, U)$ を $L(U)$ と書く。

例 2.1.3. (1)　$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ で $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

とするとき f は linear map. さらに $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq m}\in M_{mn}(K)$ に対して、$f:K^n\to K^m$ を

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}$$

と定義するとき f は linear map である。命題 2.1.4 より K^n から K^m への linear map はこの形（行列で表されるもの）に限ることがわかる。すなわち $L(K^n,K^m)$ は $M_{mn}(K)$ と同一視できる。

(2) $\mathbb{R}$-vector space $C^\infty([0,1])$ を

$$C^\infty([0,1])=\{f|f:[0,1]\to\mathbb{R}, f \text{ は } [0,1] \text{ 上何階でも微分可能 }\}$$

とする。このとき $D:C^\infty([0,1])\to C^\infty([0,1])$ を $Df=f'$（ただし f' は f の微分）と定義すると D は linear map.

(3) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=\bar{z}$ とする。（ただし $\bar{z}$ は z の共役複素数）f は $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$-vector space と考えれば linear map であるが、$\mathbb{C}$-vector space と考えれば linear map ではない。

命題 2.1.4. *U,V を有限次元 K-vector space, $f:U\to V$ を linear map とする。さらに $(a_1,\cdots,a_n),(b_1,\cdots,b_m)$ をそれぞれ U,V の基底とする。いま $f(a_j)$ の $(b_1,\cdots,b_m)$ に関する座標を $\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$ として、$A\in M_{mn}(K)$ を $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}$ と定義する。ここで $x\in U$ の $(a_1,\cdots,a_n)$ に関する座標を $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $f(x)\in V$ の $(b_1,\cdots,b_m)$ に関する座標を $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$ とするとき、*

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

が成立する。A を基底 $(a_1,\cdots,a_n),(b_1,\cdots,b_m)$ に関して f を表現する行列あるいは基底 $(a_1,\cdots,a_n),(b_1,\cdots,b_m)$ に関する f の表現行列という。$(U=V$ かつ $(a_1,\cdots,a_n)=(b_1,\cdots,b_m)$ のときは、A を基底 $(a_1,\cdots,a_n)$ に関する f の表現行列という。)

証明. $x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$ であるので、$f(x) = x_1 f(a_1) + \cdots + x_n f(a_n)$. いま $f(a_j) = a_{1j} b_1 + \cdots + a_{mj} b_m$ であるから、

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \Big((\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) b_i \Big)$$

これより $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. □

例題 2.1.5. $p(x) \in \mathrm{T}_3(\mathbb{R})$ に対して、$F(p)(x) \in \mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ を $F(p)(x) = p'(x-1)$（ただし $p'(x)$ は $p(x)$ の x で微分したもの）とし、$F : \mathrm{T}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ を定義する。F は linear map であることを示し、F の $(1, x, x^2, x^3), (1, x, x^2)$ に関する表現行列を求めよ。

解答. linear map であることは明らか。いま $F(1) = 0, F(x) = 1, F(x^2) = 2(x-1) = 2x-1, F(x^3) = 3(x-1)^2 = 3x^2-6x+3$ より F を $(1, x, x^2, x^3), (1, x, x^2)$ に関して表現する行列は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

演習 2.1. $p(x) \in \mathrm{T}_3(\mathbb{R})$ に対して、$(F(p))(x) \in \mathrm{T}_3(\mathbb{R})$ を $(F(p))(x) = (x+1)p'(x)$ と定義する。（ただし p' は p の微分）このとき $F : \mathrm{T}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{T}_3(\mathbb{R})$ は linear map であることを示せ。さらに、F を $(1, x, x^2, x^3)$ に関して表現する行列を求めよ。

演習 2.2. $f \in L(\mathbb{R}^3)$ は、

$$f\Big(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\Big(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とみたす。$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき、f の (e_1, e_2, e_3) に関する表現行列を求めよ。

命題 2.1.6. U, V, W を K-*vector spaces,* $f \in L(U, V), g \in L(V, W)$ とする。このとき $g \circ f : U \to W$ は *linear map* である。さらに U, V, W は有限次元とし、$(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_m), (c_1, \cdots, c_l)$ をそれぞれ U, V, W の基底とする。また

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(K), B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix} \in M_{lm}(K)$$

とし、A を $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_m)$ に関して f を表現する行列、B を $(b_1, \cdots, b_m), (c_1, \cdots, c_l)$ に関して g を表現する行列とする。このとき $g \circ f$ の $(a_1, \cdots, a_n), (c_1, \cdots, c_l)$ に関する表現行列を $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n} \in M_{ln}(K)$ とすれば、$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}$ である。ここで $C = BA$ と書き、B と A の積と呼ぶ。

証明.

$$\begin{aligned} g(f(a_j)) &= g(a_{1j} b_1 + \cdots + a_{mj} b_m) = a_{1j} g(b_1) + \cdots + a_{mj} g(b_m) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (a_{kj} \sum_{i=1}^{l} b_{ik} c_i) = \sum_{i=1}^{l} (\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}) c_i \end{aligned}$$

□

演習 2.3. 次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

演習 2.4. 次の行列 A に対して $A^2, A^3, \cdots$ を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 2.1.7. *U, V を K-vector space, $f \in L(U,V)$ とする。このとき*

$$\mathrm{Im} f = \{f(x) | x \in U\}, \ker f = \{x | x \in U, f(x) = 0\}$$

とする。このとき $\mathrm{Im} f, \ker f$ はそれぞれ V, U の subspace である。$\mathrm{Im} f$ を f の像 (image)、$\ker f$ を f の核 (kernel) という。さらに f が単射（1 対 1）$\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.

証明. $f(x_1)+f(x_2) = f(x_1+x_2), kf(x) = f(kx)$ より $\mathrm{Im} f, \ker f$ が subspaces になることは明らか。いま f が単射であるとするとき、$f(x) = 0$ とすると $f(x) = f(0)$ より $x = 0$. よって $\ker f = \{0\}$. 逆に $\ker f = \{0\}$ とするとき、$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $f(x_1 - x_2) = 0$. $x_1 - x_2 \in \ker f$ より $x_1 = x_2$. すなわち f は単射。 □

定理 2.1.8. *U, V を有限次元 vector spaces, $f \in L(U,V)$ とする。このとき*

$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f = \dim U$$

証明. いま $\ker f$ の基底を $(a_1, \cdots, a_m)$ とする。このとき定理 1.3.12 よりある $b_1, \cdots, b_n \in U$ が選べて、$(a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n)$ が U の基底となるようにできる。任意の $x \in U$ に対して、$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n$ とすれば、$f(x) = \beta_1 f(b_1) + \cdots + \beta_m f(b_n)$ である。したがって、$\mathrm{Im} f = \langle f(b_1), \cdots, f(b_n) \rangle$. 次に $(f(b_1), \cdots, f(b_n))$ が 1 次独立であることを示す。$\beta_1 f(b_1) + \cdots + \beta_n f(b_n) = 0$ とすれば $f(\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n) = 0$. すなわち $\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n \in \ker f$ となる。これより $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. よって $(f(b_1), \cdots, f(b_n))$ は 1 次独立であり、$\mathrm{Im} f$ の基底となる。以上より、$\dim U = m + n = \dim ker f + \dim \mathrm{Im} f$. □

上の定理の証明で、$c_1, \cdots, c_k \in V$ を $(f(b_1), \cdots, f(b_n), c_1, \cdots, c_k)$ が V の基底となるように選んでおく。このとき、U の基底 $(b_1, \cdots, b_n, a_1, \cdots, a_m)$, V の基底 $(f(b_1), \cdots, f(b_n), c_1, \cdots, c_k)$ に関する f の表現行列は

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ 0_{kn} & 0_{km} \end{pmatrix}$$

となる。ただし $I_n \in M_{nn}(K)$ は n 行 n 列の単位行列、すなわち自然数 i, j に対して

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくとき、$I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. また $O_{ij} \in M_{ij}(K)$ は i 行 j 列の零行列である。

系 2.1.9. *U, V を有限次元 vextor spaces, $f \in L(U, V)$ とする。いま、$n = \dim \mathrm{Im} f$ とすれば、f を表現する行列が、*

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるように U, V の基底を選ぶことができる。

演習 2.5. U を vector space, $f \in L(U)$ とする。$f \circ f = f$ が成立するとき、$V = \{x | x \in U, f(x) = x\}$ と定義すれば、$U = \ker f \oplus V$ が成立することを示せ。

演習 2.6. U を vector space, $f \in L(U)$ とする。ここで $n = 1, 2, \cdots$ に対して、$f^n \in L(U)$ を、$f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n$ で帰納的に定義する。

(1) 任意の $m \geq 1$ で $\mathrm{Im} f^m \supseteq \mathrm{Im} f^{m+1}$ が成り立つことを示せ。さらに、ある n で $\mathrm{Im} f^n = \mathrm{Im} f^{n+1}$ ならば、任意の $m \geq n$ で $\mathrm{Im} f^n = \mathrm{Im} f^m$ となることを示せ。

(2) 任意の $m \geq 1$ で $\ker f^m \subseteq \ker f^{m+1}$ が成り立つことを示せ。さらに、ある n で $\ker f^n = \ker f^{n+1}$ ならば、任意の $m \geq n$ で $\ker f^n = \ker f^m$ となることを示せ。

演習 2.7. $M_3(\mathbb{R})$ を 3 行 3 列の実行列の全体において行列の和およびスカラー倍を演算とした実ベクトル空間とする。$A \in M_3(\mathbb{R})$ に対して ${}^t\!A$ を A の転置行列とし、線型変換 $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ を $f(A) = (A + {}^t\!A)/2$ により定義する。このとき f の不動点の全体 $\{A | A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), f(A) = A\}$, f の像 $\{f(A) | A \in M_3(\mathbb{R})\}$ および f の核 $\{A | A \in M_3(\mathbb{R}), f(A) = 0\}$ の次元をそれぞれ求めよ。

2.2 逆変換、逆行列

定義 2.2.1. U, V を vector spaces, $f \in L(U, V)$ とする。f が正則である（or 可逆である、逆を持つ）とは、ある $g \in L(V, U)$ に対して、$f \circ g = I_V, g \circ f = I_U$ が成立することである。(I_V, I_U はそれぞれ V, U の恒等写像である。すなわち、任意の $x \in U$ に対して $I_U(x) = x$, 任意の $y \in V$ に対して $I_V(y) = y$) このとき g を f の逆写像 (inverse) といい、$g = f^{-1}$ と書く。

命題 2.2.2. *U, V を vector spaces, $f \in L(U, V)$ とする。*

(1) *f が正則 $\Leftrightarrow$ f は単射（1 対 1）かつ全射（上への写像）*

(2) f が正則ならば f の逆写像は一意に決まる。

(3) f は正則とする。 $e_1, \cdots, e_m \in U$ で $(e_1, \cdots, e_m)$ が 1 次独立ならば $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ も 1 次独立である。とくに U が有限次元ならば V も有限次元で $\dim U = \dim V$

注意. 命題 2.1.7 より上の命題の (1) の右辺の条件は、「$\ker f = \{0\}$ かつ $\mathrm{Im} f = V$」 と同値である。

証明. (1) $\Rightarrow$ $x_1, x_2 \in U$ に対して $f(x_1) = f(x_2)$ ならば、$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. したがって f は単射。また任意の $y \in V$ に対して、$f(g(y)) = y$ より $y \in \mathrm{Im} f$. したがって $\mathrm{Im} f = V$.
$\Leftarrow$ $y \in V$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in U$ がただ一つ決まる。$x = g(y)$ として $g : V \to U$ を定義する。定義より、$f \circ g = I_V, g \circ f = I_U$. 次に $g \in L(V, U)$ をしめす。いま、$y_1, y_2 \in V$ とする。このとき、

$$f(g(y_1) + g(y_2)) = f(g(y_1)) + f(g(y_2)) = y_1 + y_2.$$

この式を g で写し、$g \circ f = I_V$ を使えば、

$$g(y_1) + g(y_2) = g(y_1 + y_2).$$

次に $y \in V, k \in K$ に対して、

$$f(kg(y)) = kf(g(y)) = ky$$

この式を g で写し $g \circ f = I_V$ と使うと、

$$kg(y) = g(ky)$$

よって $g \in L(V, U)$ となり、f は正則である。

(2) (1) の $\Leftarrow$ の証明より g が一意的に決まるのは明らか。

(3) ある $k_1, \cdots, k_m \in K$（ただし U, V は K-vector spaces とする）に対して、$k_1 f(e_1) + \cdots + k_m f(e_m) = 0$ とするとき、$g(k_1 f(e_1) + \cdots + k_m f(e_m)) = k_1 e_1 + \cdots + k_m e_m = 0$. $(e_1, \cdots, e_m)$ は 1 次独立であるので $k_1 = \cdots = k_m = 0$. よって $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ は 1 次独立。いま U が有限次元とする。$(e_1, \cdots, e_m)$ を U の基底とするとき、$(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ は 1 次独立であり、$V = f(U) = \langle f(e_1), \cdots, f(e_m) \rangle$. よって $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ は V の基底である。 $\square$

系 2.2.3. *U, V を有限次元の vector spaces とし $\dim U = \dim V$ とする。また $f \in L(U, V)$ とする。このとき次の 4 つの条件は同値である。*

(1) f は正則である。

(2) 任意の $m \in \mathbb{N}$, 任意の $e_1, \cdots, e_m \in U$ に対して $(e_1, \cdots, e_m)$ が 1 次独立ならば $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ も 1 次独立である。

(3) $\ker f = \{0\}$. すなわち f は単射である。

(4) $\mathrm{Im} f = V$. すなわち f は全射である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は命題 2.2.2-(3) より明らか。
(2) $\Rightarrow$ (4): $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底とするとき、$\dim U = \dim V = n$. 補題 1.3.11 より $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ は V の基底となる。従って $\mathrm{Im} f = V$.
(3) $\Leftrightarrow$ (4): 定理 2.1.8 より、$\dim ker f = 0 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim U = \dim V$. これより明らか。
(3) $\Rightarrow$ (1): (3) $\Rightarrow$ (4) より、(3) かつ (4) が成り立つ。このとき命題 2.2.2 より f は正則である。 □

演習 2.8. U, V を vector spaces とし、$f \in L(U, V), g \in L(V, U)$ とする。$g \circ f = I_U$ ならば $V = \mathrm{Im} f \oplus \ker g$ が成り立つことを示せ。

定義 2.2.4. $A \in M_{mn}(K)$ に対して、 $B \in M_{nm}(K)$ で $AB = I_m, BA = I_n$（ただし $I_k \in M_{kk}(K)$ は $k \times k$ の単位行列）をみたすものが存在するとき A は正則（可逆、逆行列を持つ、invertible）であるという。B を A の逆行列 (inverse) といい A^{-1} と書く。

A が正則であるときその逆行列 B が一意的に決まることは、定義より明らかである。実際、B_1, B_2 を A の逆行列とするとき $AB_1 = AB_2 = I_m$ であるので、$B_1 = B_1 A B_1 = B_1 A B_2 = B_2$.

定理 2.2.5. *U, V を有限次元 vector spaces とし、$(a_1, \cdots, a_n)$, $(b_1, \cdots, b_m)$ をそれぞれ U, V の基底とする。さらに $f \in L(U, V)$ とし、f を $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_m)$ に関して表現する行列を $A \in M_{mn}(K)$ とする。このとき*

$$f \text{ が正則} \Leftrightarrow A \text{ が正則}$$

さらに、f^{-1} を $(b_1, \cdots, b_m), (a_1, \cdots, a_n)$ に関して表現する行列は A^{-1} である。

証明. f が正則ならば、f^{-1} の $(b_1, \cdots, b_m), (a_1, \cdots, a_n)$ に関する表現行列を B とすれば命題 2.1.6 より B が A の逆行列であることがわかる。逆に、A が正則ならば A^{-1} を $(b_1, \cdots, b_m), (a_1, \cdots, a_n)$ に関する表現行列とするような $g \in L(V, U)$ をとれば $g = f^{-1}$ となることがわかる。 □

この定理と命題 2.2.2-(3) より次の系がえられる。

系 2.2.6. $A \in M_{mn}(K)$ とする。A が正則ならば $m = n$.

2.3 rank

定義 2.3.1. (1) U, V を有限次元のベクトル空間、$f \in L(U, V)$ とする。このとき f の階数 (rank), $\operatorname{rank} f$ を $\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f$ と定義する。
(2) $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$、$i = 1, \cdots, n$ に対して a_j を A の j 番目の列ベクトルとする。すなわち $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ である。このとき、A の階数 (rank), $\operatorname{rank} A$ を $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_n)$ と定義する。

命題 2.3.2. U, V を有限次元 *vector spaces,* $(e_1, \cdots, e_n), (g_1, \cdots, g_m)$ をそれぞれ U, V の基底とする。さらに $f \in L(U, V)$ とし、f を $(e_1, \cdots, e_n), (g_1, \cdots, g_m)$ に関して表現する行列を $A \in M_{mn}(K)$ とする。このとき

$$\operatorname{rank} f = \dim \langle f(e_1), \cdots, f(e_n) \rangle = \operatorname{rank}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = \operatorname{rank} A$$

命題 2.3.3. (1) U, V を有限次元 *vector spaces,* $f \in L(U, V)$ とする。このとき

$$f \text{ が正則} \Leftrightarrow \dim U = \dim V = \operatorname{rank} f$$

(2) $A \in M_{nn}(K)$ とする。A が正則 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n.$

以後この節では、U, V を有限次元 vector spaces, $(e_1, \cdots, e_n), (g_1, \cdots, g_m)$ をそれぞれ U, V の基底とする。さらに $f \in L(U, V)$ とし、f を $(e_1, \cdots, e_n), (g_1, \cdots, g_m)$ に関して表現する行列を $A \in M_{mn}(K)$ とする。また A の i 行目の行ベクトルを $\hat{a}_i = (a_{i1} \cdots a_{in})$ とし、$A = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{pmatrix}$ と書く。

命題 2.3.4. $\alpha, \beta \in K$ で $\alpha \neq 0$ とする。いま、$k, l \in \{1, \ldots, m\}$ で $k \neq l$ とし、$(h_1, \cdots, h_m)$ を $i \notin \{k, l\}$ なら $h_i = g_i$, $h_k = g_k - \dfrac{\beta}{\alpha} g_l$, $h_l = \dfrac{1}{\alpha} g_l$ とおく。
(1) $(h_1, \cdots, h_m)$ は V の基底である。
(2) f を $(e_1, \cdots, e_n), (h_1, \cdots, h_m)$ に関して表現する行列を $B \in M_{mn}(K)$

とおく。さらに B の i 行目の行ベクトルを $\hat{b}_i = (b_{i1} \dots b_{in})$ とおく。このとき、

$$\hat{b}_i = \begin{cases} \hat{a}_i & i \neq l, \\ \alpha\hat{a}_l + \beta\hat{a}_k & i = l. \end{cases} \tag{2.1}$$

が成り立つ。さらに、$\dim_K\langle {}^t\hat{a}_1, \dots, {}^t\hat{a}_n\rangle = \dim_K\langle {}^t\hat{b}_1, \dots, {}^t\hat{b}_n\rangle$

証明. (1)

$$\begin{aligned} g_l &= \alpha h_l \\ g_k &= h_k + \beta h_l \end{aligned} \tag{2.2}$$

より、$\langle g_1, \dots, g_m\rangle = \langle h_1, \dots, h_m\rangle$. よって $V = \langle h_1, \dots, h_m\rangle$. いま $\dim V = m$ より $(h_1, \dots, h_m)$ は V の基底。
(2) $f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}g_j$ に (2.2) を代入すれば、

$$\begin{aligned} f(e_j) = \sum_{i=1, i\neq k,l}^{m} a_{ij}h_i + \alpha a_{lj}h_l + a_{kj}(h_k + \beta h_l) \\ = \sum_{i=1, i\neq l} a_{ij}h_i + (\alpha a_{lj} + \beta a_{kj})h_l \end{aligned}$$

□

この命題において、A, B はいずれも f を表現する行列であるから $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} f = \operatorname{rank} B$ が成り立つ。従って、行列 A に (2.3) のような変形を施しても rank は変わらないのである。

ここからは行列 A に対して A の rank を計算する方法について述べる。

$A \in M_{mn}(K), A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ とする。このとき A の j-列目の列ベクトルを $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m$ とし、$A = (a_1 \cdots a_n)$ とかく。また、 A の i-行目の行ベクトルを $\hat{a}_i = (a_{i1} \cdots a_{in})$ とし、$A = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{pmatrix}$ とかく。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_1 \cdots a_n) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{pmatrix}$$

このとき

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_m)$$

命題 1.4.7 及び 命題 2.3.4-(2) より次の命題は明らかである。

命題 2.3.5 (rank の計算)**.** $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \in M_{mn}(K)$ とする。

(C1) $\pi : \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, m\}$ を一対一の写像とするとき、

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(m)}).$$

(C2) $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq 0$, $i \neq j$ に対して、

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(a_1 \cdots a_i \cdots a_m) = \operatorname{rank}(a_1 \cdots \alpha a_i + \beta a_j \cdots a_m).$$

(R1) $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ を一対一の写像とするとき、

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \hat{a}_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

(R2) $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq 0$, $i \neq j$ に対して、

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_i \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \alpha\hat{a}_i + \beta\hat{a}_j \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix}$$

(C1), (C2) の操作を行列の列 (Colum) に関する基本変形、(R1), (R2) の操作を行列の行 (Row) に関する基本変形という。(C1), (C2), (R1), (R2) の操作を繰り返すことで行列の rank を求めることが出来る。

例題 2.3.6. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ -1 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の rank を求めよ。

解答.

$$\begin{pmatrix}1&7&1&2\\-1&9&3&6\\1&5&-2&-4\\-1&-3&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{4c-2\times 3c}\begin{pmatrix}1&7&1&0\\-1&9&3&0\\1&5&-2&0\\-1&-3&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[2r+1r,3r-1r]{4r+1r}$$
$$\begin{pmatrix}1&7&1&0\\0&16&4&0\\0&-2&-3&0\\0&4&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[2c-7\times 1c]{3c-1c}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&16&4&0\\0&-2&-3&0\\0&4&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[2r/4,3r\times -1]{4r-2r/4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4&1&0\\0&2&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(2c-4\times 3c)/(-10)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[3r\leftrightarrow 2r]{3r-3\times 2r}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

これより rank は 3. □

演習 2.9. 次の行列の rank を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3&-2\\3&-4&6&-4\\1&-2&6&-4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&-3&2&1\\3&-2&4&2\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}2&0&3&2&3\\3&1&0&1&2\\0&-2&9&4&5\\1&1&-3&-1&-1\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}1&9&2&12\\1&3&-1&3\\3&8&8&19\\-2&7&-3&2\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}a-3&2&0\\4&a-1&0\\0&0&a\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{pmatrix}$

定理 2.3.7. $A\in M_{mn}(K)$ とする。このとき $k=\operatorname{rank}A \Leftrightarrow A$ に (C1), (C2), (R1), (R2) の操作を有限回おこなえば、

$$\begin{pmatrix}I_k & O_{k\,n-k}\\ O_{m-k\,k} & O_{m-k\,n-k}\end{pmatrix}$$

になる。

この定理の証明には次の補題を用いる。

補題 2.3.8. $B \in M_{mn}(K)$ で $B \neq 0_{mn}$ とする。このとき B に (C1), (C2), (R1), (R2) の操作を有限回おこなうことで、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{11} & \cdots & c_{1\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{m-1\,1} & \cdots & c_{m-1\,n-1} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

になる。

証明.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{1r\leftrightarrow ir} \begin{pmatrix} b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{1c\leftrightarrow jc}$$

$$\begin{pmatrix} b_{ij} & \cdots & b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1j} & \cdots & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{mj} & \cdots & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{1c/b_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[2\leq j\leq n]{jc-d_{1j}\times 1c}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & * & \cdots & * \end{pmatrix} \xrightarrow[2\leq i\leq m]{ir-d_{i1}\times 1r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

□

定理 *2.3.10* の証明. $\Leftarrow$ は明らか。
$\Rightarrow$ を $m+n$ に関する帰納法で示す。$m+n=2$ のとき $(m,n)=(1,1),(0,2),(2,0)$. いずれの場合も明らか。

$m+n=N$ まで成立したとする。$m+n=N+1$ としたとき、補題 2.3.8 より (C1), (C2), (R1), (R2) を有限回行うことで、$A \in M_{mn}(K)$ は、(2.3) の形に変形できる。$C=(c_{ij})$ とおくと $C=M_{m-1\,n-1}(K)$ なので、帰納法の仮定より C に対して (C1), (C2), (R1), (R2) を有限回行うことで、目的の形に変形できる。 □

演習 2.10. (1) U, V を有限次元 vector spaces, $h_1 \in L(U), f \in L(U, V), h_2 \in L(V)$ とする。 いま h_1, h_2 が正則ならば、$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} h_2 \circ f \circ h_1$ を示せ。
(2) $A \in M_{mn}(K), B_1 \in M_{nn}(K), B_2 \in M_{mm}(K)$ とする。いま B_1, B_2 が正則ならば $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B_2 A B_1$ を示せ。

演習 2.11. U, V, W を有限次元ベクトル空間、$f \in L(U, V), g \in L(V, W)$ とする。このとき次の (1), (2) を示せ。

(1) $\operatorname{rank} g \circ f = \operatorname{rank} g \Leftrightarrow V = \ker g + \mathrm{Im} f$

(2) $\operatorname{rank} g \circ f = \operatorname{rank} f \Leftrightarrow \ker g \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$

演習 2.12. $A \in M_{nn}(K)$ とする。$A^3 = A$ であるための必要十分条件は $A^2 = A^4$ かつ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^2$ であることを示せ。

演習 2.13. $A \in M_{nn}(K)$ とする。 $A^{n-1} \neq 0, A^n = 0$ ならば $\operatorname{rank} A = n - 1$ を示せ。

演習 2.14. $A \in M_{nn}(K)$ とする。$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(I_n - A) \geq n$ を示せ。

定義 2.3.9. $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{mn}(K)$ に対して、A の転置行列 ${}^tA \in M_{nm}(K)$ を A の行と列を入れ替えた行列とする。すなわち

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

A の i 行目 $\hat{a}_i$ は ${}^tA$ の i 列目 ${}^t\hat{a}_i$ であり、A の j 列目 a_j は ${}^tA$ の j 行目 ${}^ta_j$ となる。

$$
A = (a_1 \cdots a_n) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{pmatrix}
$$

に対して、

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} {}^ta_1 \\ \vdots \\ {}^ta_n \end{pmatrix} = ({}^t\hat{a}_1 \cdots {}^t\hat{a}_m)
$$

となる。

定理 2.3.10. $A \in M_{mn}(K)$ とする。このとき

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^tA$$

演習 2.15. $A \in M_{mn}(K), B \in M_{lm}(K)$ とする。このとき ${}^t(BA) = {}^tA{}^tB$ を示せ。

演習 2.16. (2) $A \in M_{nn}(K)$ とする。このとき

$$A \text{ が正則} \Leftrightarrow {}^tA \text{ が正則}$$

を示せ。さらに A が正則ならば $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ を示せ。

演習 2.17. $K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。U を有限次元 K-ベクトル空間、$f : U \to U$ を線形写像（1次変換）とする。また $I_U : U \to U$ を恒等写像（つまり任意の $u \in U$ に対して $I_U(u) = u$）とする。このとき次の問いに答えよ。
(1) $\alpha \in K$ に対して $V(\alpha) = \{u | u \in U, f(u) = \alpha u\}$ とする。$V(\alpha)$ は U の部分ベクトル空間になることを示せ。
(2) $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ で $\alpha_1 \neq \alpha_2$ とする。このとき $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{0\}$ を示せ。
(3) $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ で $\alpha_1 \neq \alpha_2$ とするとき、次の不等式を示せ。

$$\operatorname{rank}(f - \alpha_1 I_U) + \operatorname{rank}(f - \alpha_2 I_U) \geq \dim U$$

Chapter 3

行列式

3.1　行列式 I (3×3 の場合)

2×2-行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{が逆行列を持つ} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$

は知られている。3×3-行列の場合はどうなるか？$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする。このとき、

$$A \text{ が逆行列を持つ} \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 3.$$

補題 3.1.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つ $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$.

証明. $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ である。いま、

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ d \end{pmatrix} \right) \text{が 1 次独立} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right) \text{が 1 次独立} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が逆行列を持つ $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$. □

さて、$a_{11} \neq 0$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{1c/a_{11}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}/a_{11} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}/a_{11} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3c-a_{13}\times 1c]{2c-a_{12}\times 1c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/a_{11} & a_{22}-a_{12}a_{21}/a_{11} & a_{23}-a_{13}a_{21}/a_{11} \\ a_{31}/a_{11} & a_{32}-a_{12}a_{31}/a_{11} & a_{33}-a_{13}a_{31}/a_{11} \end{pmatrix}$$

補題 3.1.1 より A が逆行列をもつ $\Leftrightarrow$

$$0 \neq \left(a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\right)\left(a_{33} - \frac{a_{13}a_{31}}{a_{11}}\right) - \left(a_{23} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{11}}\right)\left(a_{32} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{11}}\right) = \frac{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}}{a_{11}}$$

定義 3.1.2. 3×3 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ に対して、A の行列式 (determinant), $\det A$ あるいは $|A|$ を、

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

と定義する。

定理 3.1.3. 3×3 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ が逆行列を持つ $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

証明. $a_{11} \neq 0$ のときは上の計算から明らか。$a_{11} = 0$ のときは、$A \neq 0$ として、$a_{ij} \neq 0$ となるものに注目して (C1), (R1) の変形をおこない、$a_{11} \neq 0$ の場合に帰着する。 □

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ に対して } a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

とおく。すなわち $A = (a_1\, a_2\, a_3)$. このとき $|A| = D(a_1, a_2, a_3)$ と書くことにする。

命題 3.1.4. (1) $a, b \in K^3, \alpha, \beta \in K$ とするとき、

$$\begin{aligned} D(\alpha a + \beta b, a_2, a_3) &= \alpha D(a, a_2, a_3) + \beta D(b, a_2, a_3) \\ D(a_1, \alpha a + \beta b, a_3) &= \alpha D(a_1, a, a_3) + \beta D(a_1, b, a_3) \\ D(a_1, a_2, \alpha a + \beta b) &= \alpha D(a_1, a_2, a) + \beta D(a_1, a_2, b) \end{aligned}$$

(2) $D(a_1, a_3, a_2) = D(a_2, a_1, a_3) = D(a_3, a_2, a_1) = -D(a_1, a_2, a_3)$

(3) $\alpha, \beta \in K$ に対して

$$\begin{aligned} &D(\alpha a_1 + \beta a_2, a_2, a_3) = D(\alpha a_1 + \beta a_3, a_2, a_3) \\ =&D(a_1, \alpha a_2 + \beta a_1, a_3) = D(a_1, \alpha a_2 + \beta a_3, a_3) \\ =&D(a_1, a_2, \alpha a_3 + \beta a_1) = D(a_1, a_2, \alpha a_3 + \beta a_2) \\ =&\alpha D(a_1, a_2, a_3) \end{aligned}$$

(4) $|A| = |{}^tA|$

証明. (1), (2), (4) は行列式の定義に代入してみればわかる。(3) については、例えば、(1) より

$$D(\alpha a_1 + \beta a_2, a_2, a_3) = \alpha D(a_1, a_2, a_3) + \beta D(a_2, a_2, a_3)$$

いま (a_2, a_2, a_3) は 1 次独立でないので、$(a_2\, a_2\, a_3)$ は逆行列をもたない。よって $D(a_2, a_2, a_3) = 0$. □

この命題より (C1), (C2), (R1), (R2) の変形をおこなったとき、行列式の値がどのように変わるかがわかる。

例題 3.1.5. $\begin{vmatrix} 1-k & -4 & -2 \\ 2 & 7-k & 4 \\ 4 & 10 & 6+k \end{vmatrix}$ を求めよ。

解答.

$$\begin{vmatrix} 1-k & -4 & -2 \\ 2 & 7-k & 4 \\ 4 & 10 & 6+k \end{vmatrix} \overset{2c-2\times 3c}{=} \begin{vmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 2 & -(k+1) & 4 \\ 4 & -2(k+1) & 6+k \end{vmatrix} =$$

$$-(k+1) \begin{vmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 6+k \end{vmatrix} \overset{1c-2\times 2c}{=} -(k+1)(1-k) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6+k \end{vmatrix} \overset{3r-2\times 2r}{=}$$

$$(k+1)(k-1)(k-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (k+1)(k-1)(k-2).$$

□

演習 3.1. 次の行列式を計算せよ。

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \qquad (3)\quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} \qquad (5)\quad \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$(6)\quad \begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

演習 3.2. 次の等式を証明せよ。

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$$

演習 3.3. 3 角形 ABC の 3 つの角 A, B, C に対して次の式を示せ。

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

3.2 行列式 II（一般の次元）

定理 3.2.1. $K = \mathbb{R}$ *or* $\mathbb{C}$ とする。K^n の n 個のベクトル $a_1, \cdots, a_n \in K^n$ に対して $D_n(a_1, \cdots, a_n) \in K$ を対応させる写像 $D_n : K^n \times \cdots \times K^n \to K$ で次の (DT1), (DT2), (DT3) をみたすものが唯一つ存在する。

(DT1) 任意の $i \in \{1, \cdots, n\}$, 任意の $\alpha, \beta \in K^n$, 任意の $\alpha, \beta \in K$ に対して、

$$\begin{aligned}&D_n(a_1, \cdots, \underset{i\ \text{番目}}{\alpha a + \beta b}, \cdots, a_n)\\ &\qquad = \alpha D_n(a_1, \cdots, \underset{i\ \text{番目}}{a}, \cdots, a_n) + \beta D_n(a_1, \cdots, \underset{i\ \text{番目}}{b}, \cdots, a_n)\end{aligned}$$

(DT2) 任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対して、

$$\begin{aligned}&D_n(a_1, \cdots, \underset{i\ \text{番目}}{a_j}, \cdots, \underset{j\ \text{番目}}{a_i}, \cdots, a_n)\\ &\qquad = -D_n(a_1, \cdots, \underset{i\ \text{番目}}{a_i}, \cdots, \underset{j\ \text{番目}}{a_j}, \cdots, a_n)\end{aligned}$$

(DT3) $D_n(e_1, \cdots, e_n) = 1$ ただし $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i$ 番目 $(i = \{1, \cdots, n\}$.

定義 3.2.2. $n \times n$ 行列 $A = (a_1 \cdots a_n)$ （ただし $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対して a_j は A の j 列目の列ベクトル）とする。このとき A の行列式 (determinant) $|A|$ または $\det A$ を、$|A| = D_n(a_1, \cdots, a_n)$ と定義する。

定理 3.2.1 の証明は 2 つの部分に分けておこなう。

定理 3.2.1 の証明（第 1 部）. まず (DT1), (DT2), (DT3) をみたす D_n が存在することを示す。n についての数学的帰納法を用いる。$n = 1, 2, 3$ ではすでに示された。それらをそれぞれ D_1^*, D_2^*, D_3^* とおく。
D_{n-1}^* が (DT1), (DT2), (DT3) をみたすと仮定する。このとき $j = 1, \cdots, n$ に対して $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, $b_j = \begin{pmatrix} a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ として、

$$D_n^*(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} D_{n-1}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, b_n)$$

と定義する。ただし $\overset{\times}{b_j}$ は b_j をとばすことを表す。例えば $(\overset{\times}{b_1}, b_2, \cdots, b_n) = (b_2, \cdots, b_n)$, $(b_1, \overset{\times}{b_2}, b_3, \cdots, b_n) = (b_1, b_3, \cdots, b_n)$.
(DT1) の証明：$a_1, \cdots, a_n \in K^n, a_i = \alpha a + \beta b$ とする。このとき $a = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, a' = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, b' = \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ とおけば、D^*_{n-1} が (DT1) をみたすことより、

$$
\begin{aligned}
&D^*_n(a_1, \cdots, a_n) \\
=&\alpha \sum_{j:1\le j\le n, j\ne i} (-1)^{j-1} a_{1j} D^*_{n-1}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a'}, \cdots, b_n) \\
&+\beta \sum_{j:1\le j\le n, j\ne i} (-1)^{j-1} a_{1j} D^*_{n-1}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{b'}, \cdots, b_n)) \\
&+(-1)^{i-1}(\alpha u_i + \beta v_i) D_{n-1^*}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_i}, \cdots, b_n) \\
=&\alpha D^*_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a}, \cdots, a_n) + \beta D^*_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{b}, \cdots, a_n)
\end{aligned}
$$

(DT2) の証明：$1 < i$ とする。

$$
\begin{aligned}
D^*_n(a_i, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a_1}, \cdots, a_n) &= a_{1i} D^*_{n-1}(b_2, \cdots, b_{i-1}, b_1, b_{i+1}, \cdots, b_n) \\
&+(-1)^{i-1} a_{11} D^*_{n-1}(b_i, b_2, \cdots, b_{i-1}, b_{i+1}, \cdots, b_n) \\
&+\sum_{j:1\le j\le n, j\ne 1,i} (-1)^{j-1} D^*_{n-1}(b_i, b_2, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, b_1, \cdots, b_n)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

いま D^*_{n-1} は (DT2) をみたすので、

$$
\begin{aligned}
&D^*_{n-1}(b_2, \cdots, b_{i-1}, b_1, b_{i+1}, \cdots, b_n) = (-1) D^*_{n-1}(b_2, \cdots, b_1, b_{i-1}, b_{i+1}, \cdots, b_n) \\
&= \cdots = (-1)^{i-2} D^*_{n-1}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_i}, \cdots, b_n)
\end{aligned}
$$

同様に、

$$
\begin{aligned}
D^*_{n-1}(b_i, b_2, \cdots, b_{i-1}, b_{i+1}, \cdots, b_n) &= (-1)^{i-2} D^*_{n-1}(b_2, \cdots, b_n) \\
D^*_{n-1}(b_i, b_2, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, b_1, \cdots, b_n) &= (-1) D^*_{n-1}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, b_n)
\end{aligned}
$$

これらを (3.1) に代入すれば、$D_n^*(a_i, a_2, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a_1}, \cdots, a_n) = (-1)D_n^*(a_1, \cdots, a_n)$.
一般の場合もこれより明らかである。
(DT3) は D_n^* の定義から直接計算すれば明らか。

以上より上で定義した D_n^* は (DT1), (DT2), (DT3) をみたす。 □

命題 3.2.3. D_n は (DT1), (DT2), (DT3) をみたすとする。このとき

(1) ある $i \neq j$ で $a_i = a_j$ ならば $D_n(a_1, \cdots, a_n) = 0$.

(2) $\alpha, \beta \in K$, $i \neq j$ に対して、

$$D_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{\alpha a_i + \beta a_j}, \cdots, a_n) = \alpha D_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a_i}, \cdots, a_n)$$

(3) $\pi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ を *1* 対 *1* の写像とする。このとき $\operatorname{sgn}\pi = D_n^*(e_{\pi(1)}, \cdots, e_{\pi(n)})$ と定義すれば、

$$D_n(a_{\pi(1)}, \cdots, a_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn}\pi D_n(a_1, \cdots, a_n)$$

証明. (1) 簡単のため $a_1 = a_2$ とする。このとき、(DT2) より $D_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = -D_n(a_2, a_1, \cdots, a_n)$. $a_1 = a_2$ より $D_n(a_1, a_1, \cdots, a_n) = D_n(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 従って $D_n(a_1, \cdots, a_n) = 0$.
(2) (DT1) より $D_n(a_1, \cdots, \alpha a_i + \beta a_j, \cdots, a_n) = \alpha D_n(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + \beta D_n(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n)$. ここで (1) を用いれば $D_n(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = 0$ である。よって (2) が示された。 □

(3) を示すために少し準備をする。

定義 3.2.4. $S_n = \{\pi | \pi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}, \pi$ は 1 対 1$\}$ とする。S_n を n 次の置換群 (permutation group) といい、$\pi \in S_n$ を n 次の置換 (permutation) という。$\pi \in S_n$ を $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$ のように表す。
$1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ に対して、$\sigma_{i,j} \in S_n$ を、

$$\sigma_{i,j}(k) = \begin{cases} j & k = i, \\ i & k = j, \\ k & k \text{ が } i, j \text{ 以外}. \end{cases}$$

とおく。$\sigma_{i,j}$ を i, j の互換といい (i, j) と表すこともある。

$\pi \in S_n$ は $(1,2,\cdots,n)$ の $(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))$ への並べ変えを表すと考えることができる。 i,j の互換 $\sigma_{i,j}$ は i と j を入れ換えることを意味する。任意の置換（並べ換え）は互換（入れ換え）を有限回おこなうことで得られる。

例 3.2.5. (1) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$(1,2,3,4) \xrightarrow{(1,4)} (4,2,3,1) \xrightarrow{(1,3)} (4,2,1,3) \xrightarrow{(1,2)} (4,1,2,3)$$

すなわち $\pi = \sigma_{1,2} \circ \sigma_{1,3} \circ \sigma_{1,4}$
(2) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(1,2,3) \xrightarrow{(1,3)} (3,2,1) \xrightarrow{(1,2)} (3,1,2)$$

あるいは

$$(1,2,3) \xrightarrow{(1,2)} (2,1,3) \xrightarrow{(1,3)} (2,3,1) \xrightarrow{(2,3)} (3,2,1) \xrightarrow{(1,2)} (3,1,2)$$

定理 3.2.6. 任意の $\pi \in S_n$ に対して、ある互換の列 $(i_1,j_1),\cdots,(i_m,j_m)$ があって $\pi = \sigma_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ \sigma_{i_1,j_1}$. さらにこのとき

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^m$$

である。

証明. n に関する帰納法を用いる。$n=1$ のときは $S_1 = \{$ 恒等写像 $\}$ より明らか。（恒等写像は 0 個の互換で表されると考える。）
$n-1$ まで正しいとする。$\pi \in S_n$ とする。$\pi(n) = n$ ならば、$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n-1) \end{pmatrix} \in S_{n-1}$ は帰納法の仮定より互換の合成で表される。よって π は互換の合成で表せる。$\pi(n) \neq n$ のとき、$\sigma = \sigma_{\pi(n),n} \circ \pi$ とおけば、$\sigma(n) = n$. よって σ は互換の合成で表される。ここで $\pi = \sigma_{\pi(n),n} \circ \sigma$ より π も互換の合成で表される。

$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^m$ は (DT2), (DT3) より明らか。 □

系 3.2.7. $\pi \in S_n$, 互換の列 $(i_1,j_1),\cdots,(i_m,j_m)$ および $(k_1,l_1),\cdots,(k_p,l_p)$ に対して、$\pi = \sigma_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ \sigma_{i_1,j_1} = \sigma_{k_p,l_p} \circ \cdots \circ \sigma_{k_1,l_1}$ とする。このとき m,p の偶、奇は一致する。（すなわち $|m-p|$ は偶数）

証明. $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^m = (-1)^p$ より明らか。 $\square$

以上の結果より命題 3.2.3-(3) は明らかである。

命題 3.2.8. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{nn}(K)$ とする。a_j および b_j をそれぞれ A, B の j 列目の列ベクトルとする。すなわち $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$.
さらに $C = BA$ とおき C の j 列目の列ベクトル $c_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$ とする。このとき

$$D_n(c_1, \cdots, c_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi a_{\pi(1)\,1} a_{\pi(2)\,2} \cdots a_{\pi(n)\,n} D_n(b_1, \cdots, b_n).$$

証明. $c_j = a_{1j}b_1 + a_{2j}b_2 + \cdots + a_{nj}b_n$ であるので、

$$D_n(c_1, \cdots, c_n) = D_n(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} b_{i_1}, c_2, \cdots, c_n)$$
$$= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} D_n(b_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} b_{i_2}, \cdots, c_n) = \sum_{i_1, i_2=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} D_n(b_{i_1}, b_{i_2}, c_3, \cdots, c_n)$$
$$= \sum_{i_1, \cdots, i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D_n(b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_n})$$

ここで 命題 3.2.3-(1), (3) より $D_n(b_{i_1}, \cdots, b_{i_n}) =$

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} D_n(b_1, \cdots, b_n) & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{が置換} \\ 0 & \text{ある } k \neq l \text{ に対して } i_k = i_l. \end{cases}$$

従って、この命題が成立する。 $\square$

定理 3.2.9. (DT1), (DT2), (DT3) をみたす D_n は、

$$D_n(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi a_{\pi(1)\,1} a_{\pi(2)\,2} \cdots a_{\pi(n)\,n}$$

を満たす。

証明. 命題 3.2.8 で $B = I_n$ とすれば明らか。 □

定理 *3.2.1* の証明（第２部）. D_n の一意性は定理 3.2.9 より明らか。 □

命題 3.2.10. $A, B \in M_{nn}(K)$ とする。このとき

$$|AB| = |A||B|$$

証明. 命題 3.2.8 より明らか。 □

定理 3.2.11. $A \in M_{nn}(K)$ とする。このとき

$$A \text{ が正則} \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

さらに A が正則ならば $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

証明. $\Rightarrow$: A が正則のとき $AA^{-1} = I_n$. 従って $1 = |I_n| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$. よって $|A| \neq 0$.
$\Leftarrow$: A が正則でないとする。このとき $A = (a_1 \cdots a_n), a_1, \cdots, a_n \in K^n$ とすると、$(a_1, \cdots, a_n)$ は 1 次独立でない。従って、ある j に対して、

$$a_j = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{j-1} a_{j-1} + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \cdots + a_n$$

と書ける。このとき、命題 3.2.3-(1) より

$$|A| = D_n(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = \sum_{i=1,\cdots,n, i\neq j} \alpha_i D_n(a_1, \cdots, \underset{j \text{ 番目}}{a_i}, \cdots, a_n) = 0$$

□

定理 3.2.12. $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(K)$ とする。このとき $|A| = |{}^tA|$. すなわち

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}.$$

証明. ${}^tA = (b_{ij})$ とするとき $b_{ij} = a_{ji}$ より、

$$|{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}$$

ここで σ は $\{1, \cdots, n\}$ からそれ自身への 1 対 1 の写像であるので、逆写像 σ^{-1} が存在する。ここで、$\sigma = \sigma_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ \sigma_{i_1,j_1}$ ならば $\sigma^{-1} = \sigma_{i_1,j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_m,j_m}$ である。従って、$\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma^{-1}$. さらに $\pi = \sigma^{-1}$ とすれば、

$$a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} = a_{\pi(1)\,1} a_{\pi(2)\,2} \cdots a_{\pi(n)\,n}$$

である。さらに $\sigma \leftrightarrow \sigma^{-1}$ は S_n 上の 1 対 1 対応であるので、

$$
\begin{aligned}
|{}^tA| &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} a_{\sigma^{-1}(1)\,1} a_{\sigma^{-1}(2)\,2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)\,n} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi a_{\pi(1)\,1} a_{\pi(2)\,2} \cdots a_{\pi(n)\,n} = |A|
\end{aligned}
$$

□

例 3.2.13. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$ に対して、

$$
\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}
$$

定理 3.2.12 より行列式に対して、列に関して成り立つ事項（(DT1), (DT2) および 命題 3.2.3）は行に対しても成り立つことがわかる。すなわち、

命題 3.2.14. $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(K)$ の i 行目の行ベクトルを $\hat{a}_i = (a_{i1} \cdots a_{in})$ とする。(${}^ta_i \in K^n$) このとき

$$
|A| = \begin{vmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{vmatrix}
$$

と書けば、次の (1), (2), (3) が成立する。

(1) $\alpha, \beta \in K$, ${}^ta, {}^tb \in K^n$ に対して、$\hat{a}_k = \alpha a + \beta b$ ならば、

$$
|A| = \alpha \begin{vmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{vmatrix} k \text{ 行目} + \beta \begin{vmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ b \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{vmatrix} k \text{ 行目}
$$

(2) $\pi \in S_n$ に対して、

$$
\begin{vmatrix} \hat{a}_{\pi(1)} \\ \vdots \\ \hat{a}_{\pi(n)} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} \pi \begin{vmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{vmatrix}
$$

(3) $i \neq j$, $\alpha, \beta \in K$ に対して、

$$\begin{vmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \alpha\hat{a}_i + \beta\hat{a}_j \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{vmatrix} i \text{ 行目} = \alpha \begin{vmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_i \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{vmatrix} i \text{ 行目}$$

例題 3.2.15. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ をみたす x を求めよ。

解答.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{1c+(2c+3c+4c)}{=} (2x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \underset{4c-x\times 1c}{\overset{2c-1c}{=}}$$

$$(2x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & x & 1-x \\ 1 & x-1 & x & -x \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{2c+3c}{\overset{ir-1r(i=2,3,4)}{=}} (4x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1-x \\ 0 & 1 & x & -x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{4c+x\times 3c}{\overset{3c-x\times 2c}{=}} (4x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{2r-3r}{=} (4x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

従って与えられた行列式は $(4x^2-1)D_4(e_1, e_3, e_4, e_2) = (4x^2-1)$. よって $x = 1/2, -1/2$. □

演習 3.4. 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \\ 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$

演習 3.5. 次の方程式をみたす実数 x の値をすべて求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & x^3 & x^2 & x \\ x & 1 & x^3 & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$