線型代数学 B 演習 2

1. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ は対角化可能か？ 更に対角化可能ならば、この行列を対角化する $\mathbb{R}^3$ の基底を一組求めよ。

2. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ を $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき Schmidt の直交化法を用いて (a_1, a_2, a_3) から $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積に関する正規直交基底をつくれ。

3. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。Schmidt の直交化法を用いて (a_1, a_2, a_3) から $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積に関する正規直交基底 (b_1, b_2, b_3) をつくれ。さらに (e_1, e_2, e_3) から (b_1, b_2, b_3) への基底変換の行列を求めよ。

4. $f, g \in \mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ に対して、$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ と定義する。
(1) $(\cdot, \cdot)$ は $\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ の内積であることを示せ。
(2) $\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ の基底 $(1, x, x^2)$ から Schmidt の直交化法を用いて $\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ の正規直交基底をつくれ。

5. U を有限次元 K-vector space, $(\cdot, \cdot)$ を U の内積とする。$e_1, \cdots, e_m \in U$ が互いに直交するとき、$(e_1, \cdots, e_m)$ が正規直交基底であるための必要十分条件は「任意の $u \in U$ に対して $\sum_{i=1}^n |(e_i, u)|^2 = |u|^2$」であることを示せ。