線形代数学

木上　淳
京都大学大学院情報学研究科
e-mail : kigami@i.kyoto-u.ac.jp

January 27, 2015

Contents

Chapter 1

ベクトル空間

1.1 ベクトル空間の定義

例 1.1.1. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \cdots, x_n \in K \right\}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ に対して和 $x+y \in K^n$ を $x+y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$。

スカラー $\alpha \in K$ に対して $\alpha x \in K^n$ を $\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$ と定義する。

ベクトル空間 = たし算と定数倍が定義されている集合
定数 = 実数 $\mathbb{R}$ または複素数 $\mathbb{C}$ （一般には可換体）

定義 1.1.2. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。集合 U が K-ベクトル空間 (K-vector space) であるとは、任意の $u, v \in U$ に対して $u + v$, 任意の $\alpha \in K$ および任意の $u \in U$ に対して $\alpha \cdot u$ が決まって次の (V1) から (V7) の性質を満たすこと、

(V1) $a, b, c \in U \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$

(V2) $a, b \in U \Rightarrow a + b = b + a$

(V3) ある $0 \in U$ があって任意の $a \in U$ に対して $a + 0 = a$
　0 を零ベクトル (zero vector) という。

(V4) 任意の $a \in U$ に対してある $x \in U$ があり $a + x = 0$.（すなわちたし算にかんする逆元の存在）

(V5) 任意の $a \in U$ に対して $1 \cdot a = a$. ただし $1 \in K$.

(V6) 任意の $a, b \in U$, 任意の $\alpha \in K$ に対して $\alpha \cdot (a + b) = (\alpha \cdot a) + (\alpha \cdot b)$.

(V7) 任意の $a \in U$, 任意の $\alpha, \beta \in K$ に対して
$(\alpha + \beta) \cdot a = (\alpha \cdot a) + (\beta \cdot a), (\alpha\beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$
　$u, v \in U$ に対して $u + v$ を u と v の和、$\alpha \in K, u \in U$ に対して $\alpha \cdot u$ を u の定数倍（スカラー倍）という。$\alpha \cdot u$ を αu と書く。

注意. U がベクトル空間ならば、任意の $u \in U$ に対して $0 \cdot u = 0$
　$(0 \cdot u) + (0 \cdot u) = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u$ より

例 1.1.3. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。

(1) $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$-vector space, $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$-vetor space

(2) $\mathrm{T}_n(K) = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n | a_0, a_1, \cdots, a_n \in K\}$ とする。$\mathrm{T}_n(K)$ は K を係数とする x の n 次以下の多項式の全体。$\mathrm{T}_n(K)$ は K-vector space.

(3) $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f$ は連続$\}$ とする。$C([0,1])$ は $[0,1]$ 区間上の（実数値）連続関数の全体。$C([0,1])$ は $\mathbb{R}$-vector space.

(4) $M_{m,n}(K) = K$ を要素とする m 行 n 列の行列の全体

$$M_{m,n}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \text{ に対して } a_{ij} \in K \right\}$$

1.2　ベクトル空間の基底

$\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^2$ を考える。$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき任意の $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

となる。つまりすべてのベクトルを e_1, e_2 を用いて表すことができる。

次に $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする。このとき、任意のベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\frac{x_1 + x_2}{2}) f_1 + (\frac{x_1 - x_2}{2}) f_2$$

のように f_1, f_2 を用いて表すことができる。このようなベクトルの組 (e_1, e_2) や (f_1, f_2) をベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の基底とよぶ。

(e_1, e_2, f_1) を用いて任意のベクトルを表すことができるが、この場合たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 = e_2 + f_1$$

のように表し方が一通りではない。

定義 1.2.1 (基底). $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。U を K-vector space、$e_1, \cdots, e_n \in U$ とする。

(1) $(e_1, \cdots, e_n)$ が 1 次独立 (linearly independent) であるとは、任意の $x_1, \cdots, x_n \in K$ に対して $x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = 0$ ならば $x_1 = \cdots = x_n = 0$ が成り立つことである。

(2) $(e_1, \cdots, e_n)$ が U の基底 (base, basis) を成すとは、次の (B1), (B2) が成り立つことである。
(B1)　$(e_1, \cdots, e_n)$ は 1 次独立
(B2)　任意の $x \in U$ に対してある $x_1, \cdots, x_n \in K$ があって、$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ と書ける。

(B2) における $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ を基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する x の座標という。

注意. $(e_1, \cdots, e_n)$ が U の基底ならば、$x \in U$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標は一通りに定まる。実際 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ が共に $x \in U$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標であるとするとき

$$x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$$

したがって

$$(x_1 - y_1) e_1 + \cdots + (x_n - y_n) e_n = 0$$

$(e_1, \cdots, e_n)$ は 1 次独立なので $x_1 - y_1 = \cdots = x_n - y_n = 0$.

例 1.2.2. $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ とする。

(1) K-vector space K^n において

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

とおくとき $(e_1,\cdots,e_n)$ は K^n の基底

(2) $\mathrm{T}_n(K)$ において $(1,x,x^2,\cdots,x^n)$ は基底

(3) $M_{m,n}(K)$ において、$1\leq i\leq m,1\leq j\leq n$ となる i,j に対して $A(i,j)\in M_{m,n}(K)$ を (i,j)-成分が 1 でその他の成分はすべて 0 であるようなものと定める。このとき $(A(i,j)|1\leq i\leq m,1\leq j\leq m)$ は $M_{m,n}(K)$ の基底である。

注意. 有限個のベクトルからなる基底を持たないベクトル空間もある。

$$\mathrm{T}(\mathbb{R})=\text{実数係数の } x \text{ の多項式の全体}$$

とする。$f_1,\cdots,f_m\in\mathrm{T}(\mathbb{R})$ とするとき $f_1,\cdots,f_m$ の次数の最大を N としておく。このとき任意の $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{R}$ に対して $\alpha_1f_1+\cdots+\alpha_mf_m\in\mathrm{T}(\mathbb{R})$ の次数は高々 N である。従って、$(f_1\cdots,f_m)$ は $\mathrm{T}(\mathbb{R})$ の基底にはなれない。

例題 1.2.3. $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^3$ の元 f_1,f_2,f_3 を

$$f_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},f_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},f_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

で与えるとき (f_1,f_2,f_3) は $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ。

解答. 任意の $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ に対して、

$$x=(x_1-x_2)f_1+(x_2-x_3)f_2+x_3f_3$$

が成り立つ。さらに $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$ に対して $k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=0$ とするとき、

$$\begin{pmatrix}k_1+k_2+k_3\\k_2+k_3\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

これより $k_1=k_2=k_3=0$ となり (f_1,f_2,f_3) は 1 次独立である。 □

例題 1.2.4. $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R}^3$ を

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする。(g_1, g_2, g_3) は $\mathbb{R}^3$ の基底になるか？

解答. いま $g_1 - g_2 - g_3 = 0$ より (g_1, g_2, g_3) は 1 次独立ではない。 $\square$

演習 1.1. $\mathbb{C} = \{\alpha + \beta i | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ は、$k \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ に対して通常の積 kz でスカラー倍を定義するとき、$\mathbb{R}$-vector space となることを示せ。さらに、$(1, i)$ は $\mathbb{R}$-vector space としての $\mathbb{C}$ の基底であることを示せ。

演習 1.2. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

で与える。このとき (a_1, a_2, a_3) は $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ。さらに、$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の (a_1, a_2, a_3) に関する座標を求めよ。

1.3　ベクトル空間の次元

定理 1.3.1. *U を vetor space, $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底とする。このとき $m > n$ に対して、$f_1, \cdots, f_m \in U$ とするとき $(f_1, \cdots, f_m)$ は 1 次独立ではない。*

系 1.3.2. *U を vector space, $(e_1, \cdots, e_n)$ および $(f_1, \cdots, f_m)$ を U の基底とするとき $m = n$.*

定義 1.3.3. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. U を K-vector space とする。U が（有限個の元からなる）基底をもつとき U を有限次元 vector space という。そして $(e_1, \cdots, e_n)$ が U の基底であるとき n を vector space U の（K 上の）次元 (dimension) と呼び $n = \dim_K U$ と書く。暗黙のうちに K がわかっているときは $\dim_K U$ のかわりに $\dim U$ を用いることもある。

注意. vetor space U が有限個のベクトルからなる基底を持たないときは、U は無限次元のベクトル空間という。1.2 の $T(\mathbb{R})$ は無限次元のベクトル空間の例である。

例 1.3.4. (1) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n.$

(2) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n, \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n.$

(3) $\dim_K \mathrm{T}_n(K) = n + 1.$

(4) $\dim_K M_{m,n}(K) = mn.$

定理 1.3.1 の証明のための準備をする。

補題 1.3.5. *U を vector space、$e_1, \cdots, e_n \in U$ とする。このとき次の 3 つの条件は同値である。*

(1) $(e_1, \cdots, e_n)$ は 1 次独立である。

(2) $\pi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ を一対一の写像とするとき $(e_{\pi(1)}, \cdots, e_{\pi(n)})$ は 1 次独立である。

(3) $\alpha, \beta \in K, \alpha \neq 0,\ i, j \in \{1, \cdots, n\}, i \neq j$ に対して e_i を $\alpha e_i + \beta e_j$ に置き換えたものが 1 次独立である。

例題 1.3.6. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ は 1 次独立か？

解答. 補題 1.3.5 の操作を繰り返して 1 次独立かどうかが明らかな形に変形する。

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 17 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[1c-3c]{4c-3c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -12 & 4 & 17 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3c-2\times1c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ -12 & 4 & 41 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{4c+3\times2c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ -12 & 4 & 41 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4c-3c)/(-34)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -12 & 4 & 41 & 1 \end{pmatrix}$$

これより与えられた 4 つのベクトルは 1 次独立である。 □

演習 1.3.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix},\ f_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とおく。(f_1, f_2, f_3, f_4) は $\mathbb{R}^4$ で 1 次独立か？

補題 1.3.7. $K = \mathbb{R}$ *or* $\mathbb{C}$ とする。K^n の $n+1$ 個のベクトルは 1 次独立ではない。

証明. n に関する数学的帰納法を用いる。
$n = 1$ のとき、$a_1, a_2 \in K$ とする。$a_2 = 0$ ならば $0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = 0$、$a_2 \neq 0$ ならば $1 \cdot a_1 + (-a_1/a_2) \cdot a_2 = 0$. 従って (a_1, a_2) は 1 次独立ではない。
$n-1$ まで成立したとする。すなわち K^{n-1} の n 個のベクトルは 1 次独立ではない。いま $a_1, \cdots, a_{n+1} \in K^n$ で　$i = 1, \cdots, n+1$ で $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ とする。

Case 1　すべての i に対して $a_{ni} = 0$ ならば $\tilde{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{n-1\,i} \end{pmatrix} \in K^{n-1}$ とおく。
$(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_{n+1})$ は帰納法の仮定より 1 次独立でない。従って $(a_1, \cdots, a_{n+1})$ も 1 次独立でない。
Case 2　ある i で $a_{ni} \neq 0$ のとき、補題 1.3.5 の操作を Step 1, Step 2, Step 3 以下のように繰り返す。
Step 1　a_{n+1} と a_i を入れ換えて、$a_{n\,n+1} \neq 0$ としてよい。
Step 2　次に a_{n+1} を $a_{n\,n+1}$ で割ることにより、$a_{n\,n+1} = 1$ としてよい。
Step 3　さらに $i = 1, \cdots, n$ に対して a_i を $a_i - a_{ni} \times a_{n+1}$ で置き換えることで、$a_{ni} = 0$ が $i = 1, \cdots, n$ で成り立つとしてよい。

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1i} & & a_{1\,n+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{ni} \neq 0 & & a_{n\,n+1} \end{pmatrix} \xrightarrow[a_i \leftrightarrow a_{n+1}]{\text{Step 1}} \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1\,n+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{n\,n+1} \neq 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[a_{n+1}/a_{nn+1}]{\text{Step 2}} \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1\,n+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[a_i - a_{ni} \times a_{n+1}]{\text{Step 3}} \begin{pmatrix} & & & a_{1\,n+1} \\ \tilde{a}_1 & \cdots & \tilde{a}_n & \vdots \\ & & & a_{n-1\,n+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

ここで $\tilde{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{n-1\,i} \end{pmatrix} \in K^{n-1}$ とすると $(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n)$ は帰納法の仮定より 1 次独立でない。従って $(a_1, \cdots, a_{n+1})$ は 1 次独立でない。 $\square$

定理 *1.3.1* の証明. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ として、U は K-vector space とする。いま $m = n+1$ としても一般性を失わない。f_i の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in K^n$ とする。このとき

U で $(f_1, \cdots, f_{n+1})$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow$ K^n で $(a_1, \cdots, a_{n+1})$ が 1 次独立

補題 1.3.7 より $(f_1, \cdots, f_{n+1})$ は 1 次独立でない。 $\square$

定義 1.3.8. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. U を K-vector space とする。$f_1, \cdots, f_m \in U$ に対して、

$$
\langle f_1, \cdots, f_m \rangle = \{u | \text{ある } k_1, \cdots, k_m \in K \text{ に対して } u = k_1 f_1 + \cdots + k_m f_m\}
$$

この定義より、すぐに次の補題が得られる。

補題 1.3.9. *U を vector space とするとき、$f_1, \cdots, f_n \in U$ に対して、*

$$
(f_1, \cdots, f_n) \text{ が } U \text{ の基底} \Leftrightarrow (f_1, \cdots, f_n) \text{ は 1 次独立かつ } U = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle.
$$

補題 1.3.10. *U を vector space, $f_1, \cdots, f_m \in U$ であり $(f_1, \cdots, f_m)$ は 1 次独立であるとする。いま $u \in U$ が $u \notin \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$ をみたすならば、$(f_1, \cdots, f_m, u)$ は 1 次独立である。*

証明. $k_1, \cdots, k_m, k \in K$ に対して、$k_1 f_1 + \cdots + k_m f_m + ku = 0$ とする。このとき $u \notin \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$ より $k = 0$. ここで $(f_1, \cdots, f_m)$ は 1 次独立であるから $k_1 = \cdots = k_m = 0$. 従って $(f_1, \cdots, f_m, u)$ は 1 次独立。 □

補題 1.3.11. U を有限次元の *vector space,* $\dim U = n$ とする。いま $f_1, \cdots, f_n \in U$ で $(f_1, \cdots, f_n)$ が 1 次独立ならば $(f_1, \cdots, f_n)$ は U の基底である。

証明. ある $u \in U$ で $u \notin \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ とするとき $(f_1, \cdots, f_n, u)$ は 1 次独立。これは定理 1.3.1 に反する。従って $U = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$. 補題 1.3.9 より $(f_1, \cdots, f_n)$ は基底である。 □

定理 1.3.12. U を有限次元の *vector space,* $\dim U = n$ とする。このとき $m < n$ に対して $f_1, \cdots, f_m \in U$ かつ $(f_1, \cdots, f_m)$ は 1 次独立であるとする。このときある $f_{m+1}, \cdots, f_n \in U$ がとれて、$(f_1, \cdots, f_n)$ が U の基底となるようにできる。

証明. $m < n$ であるから定理 1.3.1 より $(f_1, \cdots, f_m)$ は U の基底ではない。従って補題 1.3.9 より $U \neq \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$. すなわちある $u \in U$ で $u \notin \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$. 補題 1.3.10 より $(f_1, \cdots, f_m, u)$ は 1 次独立である。$u = f_{m+1}$ とする。この操作を繰り返すことで $f_{m+1}, \cdots, f_n \in U$ を $(f_1, \cdots, f_n)$ が 1 次独立となるように選ぶことができる。ここで補題 1.3.11 より $(f_1, \cdots, f_n)$ は U の基底となる。 □

例題 1.3.13. $k \in \mathbb{R}$ に対して $f_1(x) = (1-k) + 2x + 4x^2, f_2(x) = -4 + (7-k)x + 10x^2, f_3(x) = -2 + 4x + (6+k)x^2$ とする。(f_1, f_2, f_3) が $\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ の基底となるための k に関する必要十分条件を求めよ。

解答. $\dim \mathrm{T}_2(\mathbb{R}) = 3$ であるので、補題 1.3.11 より (f_1, f_2, f_3) が 1 次独立 $\Leftrightarrow$ (f_1, f_2, f_3) が $\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ の基底。いま f_1, f_2, f_3 の $(1, x, x^2)$ に関する座標を考える。

$$\begin{pmatrix} 1-k & -4 & -2 \\ 2 & 7-k & 4 \\ 4 & 10 & 6+k \end{pmatrix} \xrightarrow{2c-2\times 3c} \begin{pmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 2 & -(k+1) & 4 \\ 4 & -2(k+1) & 6+k \end{pmatrix}$$

$k = -1$ のとき 2 列目は 0 であるので 1 次独立でない。$k \neq -1$ のときは 2 列目を $-(k+1)$ で割っておく。

$$\begin{pmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 6+k \end{pmatrix} \xrightarrow[1c-2\times 2c]{3c-4\times 2c} \begin{pmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 \end{pmatrix}$$

$k=1$ のとき 1 列目は 0 であるので 1 次独立でない。$k \neq 1$ のときは 1 列目を $1-k$ で割っておく。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3c+2\times 1c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k-2 \end{pmatrix}$$

$k=2$ のときは 3 列目が 0 であるので 1 次独立ではない。$k \neq 2$ のときは 3 列目を $k-2$ で割っておけば 1 次独立であることがわかる。以上より (f_1, f_2, f_3) が基底になるための必要十分条件は $k \notin \{-1, 1, 2\}$. □

1.4 部分ベクトル空間

定義 1.4.1. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, U を K-vector space とする。このとき $V \subseteq U$ が U の部分ベクトル空間 (subspace) であるとは、

(1) 任意の $u, v \in V$ に対して $u+v \in U$,

(2) 任意の $k \in K$, 任意の $u \in V$ に対して $ku \in V$

が成り立つことである。

この定義より次の命題は明らかである。

命題 1.4.2. *U を K-vector space, $V \subseteq U$ を U の subspace とするとき、V は U の和および定数倍（を V に制限したもの）に関して K-vector space である。*

さらに $\langle \cdot \rangle$ の定義（定義 1.3.8）より次の命題も明らかである。

命題 1.4.3. *U を vector space, $a_1, \cdots, a_m \in U$ とする。このとき $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ は U の subspace である。$\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ を $(a_1, \cdots, a_m)$ で生成される U の subspace という。*

例 1.4.4. (1) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x+3y=z \right\}$ とする。このとき V は $\mathbb{R}^3$ の subspace である。また $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ である。

(2) $\mathbb{R}^3 \supset V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x \geq y \geq z \right\}$ とする。このとき V は $\mathbb{R}^3$ の subspace ではない。実際、$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ であるが、$-\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin V$.

(3) $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ の部分集合と考える。このとき $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$-vector space と見なすときは $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ の subspace である。しかしながら、$\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$-vector space と見なすときは $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ の subspace ではない。

(4) 例 1.1.3-(3) で定義された $\mathbb{R}$-vector space $C([0,1])$ の部分集合 V を $V = \{f | f \in C([0,1]), \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ とする。このとき V は $C([0,1])$ の subspace である。

定理 1.4.5. *U を vector space, $a_1, \cdots, a_m \in U$ で少なくとも一つの $a_i \neq 0$ とする。このときある $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$ で $(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ が $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ の基底となるものが存在する。特に $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ は有限次元 vector space である。*

証明.

$$\mathcal{B} = \{(a_{j_1}, \cdots, a_{j_l}) | 1 \leq l \leq m, 1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq m, \\ (a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}) \text{ は 1 次独立}\}$$

とする。$\mathcal{B}$ はたかだか有限集合である。また、$a_i \neq 0$ となる a_i に対して $(a_i) \in \mathcal{B}$ より $\mathcal{B}$ は空集合でない。ここで $\mathcal{B}$ の元のうち l が最大であるようなものを、$(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ とする。(すなわち k が l の最大値) ここで $i_1, \cdots, i_k$ に入らない i に対して、$(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}, a_i)$ は 1 次独立ではないので、ある $\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha$ があって

$$\alpha_1 a_{i_1} + \cdots + \alpha_k a_{i_k} + \alpha a_i = 0$$

かつ $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \alpha) \neq (0, \cdots, 0, 0)$. いま $\alpha = 0$ とするとき $(a_{i_1} \cdots, a_{i_k})$ は 1 次独立より $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) = (0, \cdots, 0)$. これは矛盾。従って $\alpha \neq 0$. これより $a_i = (\alpha_1/\alpha)a_{i_1} + \cdots + (\alpha_k/\alpha)a_{i_k}$ となるので $a_i \in \langle a_{i_1}, \cdots, a_{i_k} \rangle$. よって $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle = \langle a_{i_1}, \cdots, a_{i_k} \rangle$. ゆえに $(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ は $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ の基底である。 $\square$

上の定理（の証明）より

$$\dim \langle a_1, \cdots, a_m \rangle = a_1, \cdots, a_m \text{ から選ぶことができる} \\ \text{1 次独立なベクトルの組の含むベクトルの数の最大値} \leq m$$

定義 1.4.6. U を vector space, $a_1, \cdots, a_m \in U$ とする。このとき $(a_1, \cdots, a_m)$ の階数 (rank), $\mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, a_m)$ を

$$\mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, a_m) = \dim \langle a_1, \cdots, a_m \rangle$$

と定義する。

$\mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, a_m) \leq m$ である。

命題 1.4.7 (rank の計算:列に関する基本変形)**.** *U を K-vector space, $a_1, \cdots, a_m \in U$ とする。*

(1) $\pi : \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, m\}$ を一対一の写像とするとき、

$$\mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, a_m) = \mathrm{rank}\,(a_{\pi(1)}, \cdots, a_{\pi(m)}).$$

(2) $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq 0$, $i \neq j$ に対して、

$$\mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_m) = \mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, \alpha a_i + \beta a_j, \cdots, a_m).$$

例題 1.4.8. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}^4$ をそれぞれ、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。$\mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, a_5)$ を求めよ。

解答.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2c-3\times 1c, 4c-1c]{5c-3\times 1c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[1c-3c, 2c+3c]{(4c-3c)/8, 5c+3\times 3c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[1c-3\times 8c, 3c+4\times 8c]{4c+8\times 3c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより $\mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, a_5) = 3$ □

演習 1.4. $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$ をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき $\mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, a_4)$ を求めよ。

演習 1.5. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}^4$ をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき $\mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, a_5)$ を求めよ。さらに $(a_1, \cdots, a_5)$ の中から適当に選んで、$\langle a_1, \cdots, a_5 \rangle$ の基底を作れ。

定理 1.4.9. *U を有限次元 vector space, V を U の subspace とする。このとき V も有限次元であり、$\dim V \leq \dim U$.*

証明. $\dim U = n$ とする。いま、

$$\mathcal{A} = \{(f_1, \cdots, f_m) | f_1, \cdots, f_m \in V, (f_1, \cdots, f_m) \text{ は 1 次独立 }\}$$

とすると、定理 1.3.1 より $(f_1, \cdots, f_m) \in \mathcal{A}$ ならば $m \leq n$. 従って $\{m | (f_1, \cdots, f_m) \in \mathcal{A}\}$ は最大値をもつ。その最大値を k として、$(a_1, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}$ を選ぶ. もしある $a \in V$ に対して、$a \notin \langle a_1, \cdots, a_k \rangle$ ならば補題 1.3.10 より $(a_1, \cdots, a_k, a)$ は 1 次独立である。これは k の取り方に矛盾するので、$V = \langle a_1, \cdots, a_k \rangle$. 従って $(a_1, \cdots, a_k)$ は V の基底となり、$\dim V = k$. □

定理 1.4.10. *U を vector space, V_1, V_2 を U の subspaces とする。このとき、*

$$V_1 + V_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$$

とすれば、$V_1 + V_2$ は U の subspace である。さらに

(1) $V_1 + V_2$ は $V_1 \cup V_2$ を含む U の subspaces のうち最小のものである。

(2) $V_1 + V_2$ が有限次元のとき、

$$\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$$

証明. (2) 以外は明らか。いま $V_1 \cap V_2$ の基底を $(e_1, \cdots, e_k)$ とする。このとき、定理 1.3.12 よりある $a_1, \cdots, a_n \in V_1, b_1, \cdots, b_m \in V_2$ で $(e_1, \cdots, e_k, a_1, \cdots, a_n)$, $(e_1, \cdots, e_k, b_1, \cdots, b_m)$ がそれぞれ V_1, V_2 の基底となるものが存在する。ここで $V_1 + V_1 = \langle e_1, \cdots, e_k, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m \rangle$. さて、

$$\gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_k e_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n + \beta_1 + \cdots + \beta_m = 0$$

とし、

$$x = \gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_k e_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = -(\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m)$$

とおく。このとき $x \in V_1 \cap V_2$ より $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$. したがって $x = 0$. これより $\gamma_1 = \cdots = \gamma_k = 0$. 以上より $(e_1, \cdots, e_k, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m)$ は 1 次独立であり、$V_1 + V_2$ の基底となる。よって $\dim V_1 + V_2 = k + m + n = (n + k) + (m + k) - k = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$. □

系 1.4.11. *U を vector space, V_1, V_2 を U の subspaces とする。このとき次の (1), (2) は同値である。*

(1) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

(2) 任意の $x \in V_1 + V_2$ に対して、$(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ がただ一組あって $x = x_1 + x_2$.

さらに $V_1 + V_2$ が有限次元ならば (1), (2) は次の (3) とも同値である。

(3) $\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$

証明. (1) ⇒ (2): $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V_1 \times V_2$ で $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ とするとき、$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in V_1 \cap V_2$ より $x_1 = y_1, x_2 = y_2$
(2) ⇒ (1): $x \in V_1 \cap V_2$ とする。このとき $(x, 0), (0, x) \in V_1 \times V_2$ である。(2) より $(x, 0) = (0, x)$. よって $x = 0$.
(1) ⇔ (3) は定理 1.4.10-(2) より明らか。 □

定義 1.4.12. 系 1.4.11 の状況のとき $V_1 + V_2$ を $V_1 \oplus V_2$ と書き V_1 と V_2 の直和と呼ぶ。

演習 1.6. 次の (1), (2) について、$V \subset U$ は U の subspace であることを示し、さらにその基底を一組求めよ。

(1) $U = \mathbb{R}^4$ and

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_1 + 2x_2 = 0, x_1 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

(2) $U = T_3(\mathbb{R})$ and $V = \{f | \int_0^1 f(x)dx = 0\}$

Chapter 2

1次変換、行列

2.1　1次変換と行列

定義 2.1.1. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ として U, V を K-vector space とする。いま $f : U \to V$ が1次変換（線形変換、linear transformation, linear map）であるとは、

(L1) 任意の $x, y \in U$ に対して $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

(L2) 任意の $x \in U$, 任意の $k \in K$ に対して $f(kx) = kf(x)$

が成り立つことである。

命題 2.1.2. *$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とし、U, V を K-vector space とする。いま*

$$L(U, V) = U \text{ から } V \text{ への linear map の全体}$$

とする。このとき $f, g \in L(U, V)$ に対して、$f + g : U \to V$ を、任意の $x \in U$ に対して $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ と定義するとき $f + g \in L(U, V)$ である。また $k \in K, f \in L(U, V)$ に対して $kf : U \to V$ を、任意の $x \in U$ に対して $(kf)(x) = kf(x)$ と定義するとき $kf \in L(U, V)$ である。さらにこの和と定数倍の演算に関して $L(U, V)$ は K-vector space になる。

$U = V$ のとき $L(U, U)$ を $L(U)$ と書く。

例 2.1.3. (1)　$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ で $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

とするとき f は linear map. さらに $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq m}\in M_{mn}(K)$ に対して、$f:K^n\to K^m$ を

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}$$

と定義するとき f は linear map である。命題 2.1.4 より K^n から K^m への linear map はこの形（行列で表されるもの）に限ることがわかる。すなわち $L(K^n,K^m)$ は $M_{mn}(K)$ と同一視できる。

(2) $\mathbb{R}$-vector space $C^\infty([0,1])$ を

$$C^\infty([0,1])=\{f|f:[0,1]\to\mathbb{R}, f \text{ は } [0,1] \text{ 上何階でも微分可能 }\}$$

とする。このとき $D:C^\infty([0,1])\to C^\infty([0,1])$ を $Df=f'$（ただし f' は f の微分）と定義すると D は linear map.

(3) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=\bar{z}$ とする。（ただし $\bar{z}$ は z の共役複素数）f は $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$-vector space と考えれば linear map であるが、$\mathbb{C}$-vector space と考えれば linear map ではない。

命題 2.1.4. *U,V を有限次元 K-vector space, $f:U\to V$ を linear map とする。さらに $(a_1,\cdots,a_n),(b_1,\cdots,b_m)$ をそれぞれ U,V の基底とする。いま $f(a_j)$ の $(b_1,\cdots,b_m)$ に関する座標を $\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$ として、$A\in M_{mn}(K)$ を $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}$ と定義する。ここで $x\in U$ の $(a_1,\cdots,a_n)$ に関する座標を $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $f(x)\in V$ の $(b_1,\cdots,b_m)$ に関する座標を $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$ とするとき、*

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

が成立する。A を基底 $(a_1,\cdots,a_n),(b_1,\cdots,b_m)$ に関して f を表現する行列あるいは基底 $(a_1,\cdots,a_n),(b_1,\cdots,b_m)$ に関する f の表現行列という。($U=V$ かつ $(a_1,\cdots,a_n)=(b_1,\cdots,b_m)$ のときは、A を基底 $(a_1,\cdots,a_n)$ に関する f の表現行列という。)

証明. $x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$ であるので、$f(x) = x_1 f(a_1) + \cdots + x_n f(a_n)$. いま $f(a_j) = a_{1j} b_1 + \cdots + a_{mj} b_m$ であるから、

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \Big((\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) b_i \Big)$$

これより $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. □

例題 2.1.5. $p(x) \in \mathrm{T}_3(\mathbb{R})$ に対して、$F(p)(x) \in \mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ を $F(p)(x) = p'(x-1)$ (ただし $p'(x)$ は $p(x)$ の x で微分したもの) とし、$F : \mathrm{T}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ を定義する。F は linear map であることを示し、F の $(1, x, x^2, x^3), (1, x, x^2)$ に関する表現行列を求めよ。

解答. linear map であることは明らか。いま $F(1) = 0, F(x) = 1, F(x^2) = 2(x-1) = 2x-1, F(x^3) = 3(x-1)^2 = 3x^2-6x+3$ より F を $(1, x, x^2, x^3), (1, x, x^2)$ に関して表現する行列は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

演習 2.1. $p(x) \in \mathrm{T}_3(\mathbb{R})$ に対して、$(F(p))(x) \in \mathrm{T}_3(\mathbb{R})$ を $(F(p))(x) = (x+1)p'(x)$ と定義する。(ただし p' は p の微分) このとき $F : \mathrm{T}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{T}_3(\mathbb{R})$ は linear map であることを示せ。さらに、F を $(1, x, x^2, x^3)$ に関して表現する行列を求めよ。

演習 2.2. $f \in L(\mathbb{R}^3)$ は、

$$f\Big(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\Big(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とみたす。$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき、f の (e_1, e_2, e_3) に関する表現行列を求めよ。

命題 2.1.6. U, V, W を K-*vector spaces*, $f \in L(U,V), g \in L(V,W)$ とする。このとき $g \circ f : U \to W$ は *linear map* である。さらに U, V, W は有限次元とし、$(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_m), (c_1, \cdots, c_l)$ をそれぞれ U, V, W の基底とする。また

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{mn}(K), B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix} \in M_{lm}(K)$$

とし、A を $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_m)$ に関して f を表現する行列、B を $(b_1, \cdots, b_m), (c_1, \cdots, c_l)$ に関して g を表現する行列とする。このとき $g \circ f$ の $(a_1, \cdots, a_n), (c_1, \cdots, c_l)$ に関する表現行列を $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n} \in M_{ln}(K)$ とすれば、$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}$ である。ここで $C = BA$ と書き、B と A の積と呼ぶ。

証明.

$$\begin{aligned} g(f(a_j)) &= g(a_{1j} b_1 + \cdots + a_{mj} b_m) = a_{1j} g(b_1) + \cdots + a_{mj} g(b_m) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (a_{kj} \sum_{i=1}^{l} b_{ik} c_i) = \sum_{i=1}^{l} (\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}) c_i \end{aligned}$$

□

演習 2.3. 次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

演習 2.4. 次の行列 A に対して $A^2, A^3, \cdots$ を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 2.1.7. *U, V を K-vector space, $f \in L(U, V)$ とする。このとき*

$$\mathrm{Im} f = \{f(x) | x \in U\}, \ker f = \{x | x \in U, f(x) = 0\}$$

とする。このとき $\mathrm{Im} f, \ker f$ はそれぞれ V, U の subspace である。$\mathrm{Im} f$ を f の像 (image)、$\ker f$ を f の核 (kernel) という。さらに f が単射（1 対 1）$\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$.

証明. $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2), kf(x) = f(kx)$ より $\mathrm{Im} f, \ker f$ が subspaces になることは明らか。いま f が単射であるとするとき、$f(x) = 0$ とすると $f(x) = f(0)$ より $x = 0$. よって $\ker f = \{0\}$. 逆に $\ker f = \{0\}$ とするとき、$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $f(x_1 - x_2) = 0$. $x_1 - x_2 \in \ker f$ より $x_1 = x_2$. すなわち f は単射。 □

定理 2.1.8. *U, V を有限次元 vector spaces, $f \in L(U, V)$ とする。このとき*

$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f = \dim U$$

証明. いま $\ker f$ の基底を $(a_1, \cdots, a_m)$ とする。このとき定理 1.3.12 よりある $b_1, \cdots, b_n \in U$ が選べて、$(a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n)$ が U の基底となるようにできる。任意の $x \in U$ に対して、$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n$ とすれば、$f(x) = \beta_1 f(b_1) + \cdots + \beta_m f(b_n)$ である。したがって、$\mathrm{Im} f = \langle f(b_1), \cdots, f(b_n) \rangle$. 次に $(f(b_1), \cdots, f(b_n))$ が 1 次独立であることを示す。$\beta_1 f(b_1) + \cdots + \beta_n f(b_n) = 0$ とすれば $f(\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n) = 0$. すなわち $\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n \in \ker f$ となる。これより $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. よって $(f(b_1), \cdots, f(b_n))$ は 1 次独立であり、$\mathrm{Im} f$ の基底となる。以上より、$\dim U = m + n = \dim ker f + \dim \mathrm{Im} f$. □

上の定理の証明で、$c_1, \cdots, c_k \in V$ を $(f(b_1), \cdots, f(b_n), c_1, \cdots, c_k)$ が V の基底となるように選んでおく。このとき、U の基底 $(b_1, \cdots, b_n, a_1, \cdots, a_m)$, V の基底 $(f(b_1), \cdots, f(b_n), c_1, \cdots, c_k)$ に関する f の表現行列は

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_{nm} \\ 0_{kn} & 0_{km} \end{pmatrix}$$

となる。ただし $I_n \in M_{nn}(K)$ は n 行 n 列の単位行列、すなわち自然数 i, j に対して

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくとき、$I_n = (\delta_{ij})_{1 \le i, j \le n}$. また $O_{ij} \in M_{ij}(K)$ は i 行 j 列の零行列である。

系 2.1.9. U, V を有限次元 *vextor spaces,* $f \in L(U, V)$ とする。いま、$n = \dim \mathrm{Im} f$ とすれば、f を表現する行列が、

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるように U, V の基底を選ぶことができる。

演習 2.5. U を vector space, $f \in L(U)$ とする。$f \circ f = f$ が成立するとき、$V = \{x | x \in U, f(x) = x\}$ と定義すれば、$U = \ker f \oplus V$ が成立することを示せ。

演習 2.6. U を vector space, $f \in L(U)$ とする。ここで $n = 1, 2, \cdots$ に対して、$f^n \in L(U)$ を、$f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n$ で帰納的に定義する。

(1) 任意の $m \geq 1$ で $\mathrm{Im} f^m \supseteq \mathrm{Im} f^{m+1}$ が成り立つことを示せ。さらに、ある n で $\mathrm{Im} f^n = \mathrm{Im} f^{n+1}$ ならば、任意の $m \geq n$ で $\mathrm{Im} f^n = \mathrm{Im} f^m$ となることを示せ。

(2) 任意の $m \geq 1$ で $\ker f^m \subseteq \ker f^{m+1}$ が成り立つことを示せ。さらに、ある n で $\ker f^n = \ker f^{n+1}$ ならば、任意の $m \geq n$ で $\ker f^n = \ker f^m$ となることを示せ。

演習 2.7. $M_3(\mathbb{R})$ を 3 行 3 列の実行列の全体において行列の和およびスカラー倍を演算とした実ベクトル空間とする。$A \in M_3(\mathbb{R})$ に対して ${}^tA$ を A の転置行列とし、線型変換 $f : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ を $f(A) = (A + {}^tA)/2$ により定義する。このとき f の不動点の全体 $\{A | A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), f(A) = A\}$, f の像 $\{f(A) | A \in M_3(\mathbb{R})\}$ および f の核 $\{A | A \in M_3(\mathbb{R}), f(A) = 0\}$ の次元をそれぞれ求めよ。

2.2 逆変換、逆行列

定義 2.2.1. U, V を vector spaces, $f \in L(U, V)$ とする。f が正則である（or 可逆である、逆を持つ）とは、ある $g \in L(U, V)$ に対して、$f \circ g = I_V, g \circ f = I_U$ が成立することである。（I_V, I_U はそれぞれ V, U の恒等写像である。）このとき g を f の逆写像 (inverse) といい、$g = f^{-1}$ と書く。

命題 2.2.2. U, V を *vector spaces,* $f \in L(U, V)$ とする。

(1) f が正則 $\Leftrightarrow$ f は単射（1 対 1）かつ全射（上への写像）

(2) f が正則ならば f の逆写像は一意に決まる。

(3) f は正則とする。 $e_1, \cdots, e_m \in U$ で $(e_1, \cdots, e_m)$ が1次独立ならば $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ も1次独立である。とくに U が有限次元ならば V も有限次元で $\dim U = \dim V$

注意. 命題 2.1.7 より上の命題の (1) の右辺の条件は、「$\ker f = \{0\}$ かつ $\mathrm{Im} f = V$」 と同値である。

証明. (1) $\Rightarrow$ $x_1, x_2 \in U$ に対して $f(x_1) = f(x_2)$ ならば、$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. したがって f は単射。また任意の $y \in V$ に対して、$f(g(y)) = y$ より $y \in \mathrm{Im} f$. したがって $\mathrm{Im} f = V$.
$\Leftarrow$ $y \in V$ に対して $g(x) = y$ となる $x \in U$ がただ一つ決まる。$x = g(y)$ として $g : V \to U$ を定義する。定義より、$f \circ g = I_V, g \circ f = I_U$. 次に $g \in L(U, V)$ をしめす。いま、$y_1, y_2 \in V$ とする。このとき、

$$f(g(y_1) + g(y_2)) = f(g(y_1)) + f(g(y_2)) = y_1 + y_2.$$

この式を g で写し、$g \circ f = I_V$ を使えば、

$$g(y_1) + g(y_2) = g(y_1 + y_2).$$

次に $y \in V, k \in K$ に対して、

$$f(kg(y)) = kf(g(y)) = ky$$

この式を g で写し $g \circ f = I_V$ と使うと、

$$kg(y) = g(ky)$$

よって $g \in L(V, U)$ となり、f は正則である。

(2) (1) の $\Leftarrow$ の証明より g が一意的に決まるのは明らか。

(3) ある $k_1, \cdots, k_m \in K$（ただし U, V は K-vector spaces とする）に対して、$k_1 f(e_1) + \cdots + k_m f(e_m) = 0$ とするとき、$g(k_1 f(e_1) + \cdots + k_m f(e_m)) = k_1 e_1 + \cdots + k_m e_m = 0$. $(e_1, \cdots, e_m)$ は1次独立であるので $k_1 = \cdots = k_m = 0$. よって $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ は1次独立。いま U が有限次元とする。$(e_1, \cdots, e_m)$ を U の基底とするとき、$(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ は1次独立であり、$V = f(U) = \langle f(e_1), \cdots, f(e_m) \rangle$. よって $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ は V の基底である。 □

系 2.2.3. U, V を有限次元の *vector spaces* とし $\dim U = \dim V$ とする。また $f \in L(U, V)$ とする。このとき次の *4* つの条件は同値である。

(1) f は正則である。

(2) 任意の $m \in \mathbb{N}$, 任意の $e_1, \cdots, e_m \in U$ に対して $(e_1, \cdots, e_m)$ が 1 次独立ならば $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ も 1 次独立である。

(3) $\ker f = \{0\}$. すなわち f は単射である。

(4) $\mathrm{Im} f = V$. すなわち f は全射である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は命題 2.2.2-(3) より明らか。
(2) $\Rightarrow$ (4): $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底とするとき、$\dim U = \dim V = n$. 補題 1.3.11 より $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ は V の基底となる。従って $\mathrm{Im} f = V$.
(3) $\Leftrightarrow$ (4): 定理 2.1.8 より、$\dim ker f = 0 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim U = \dim V$. これより明らか。
(3) $\Rightarrow$ (1): (3) $\Rightarrow$ (4) より、(3) かつ (4) が成り立つ。このとき命題 2.2.2 より f は正則である。 $\square$

演習 2.8. U, V を vector spaces とし、$f \in L(U, V), g \in L(V, U)$ とする。$g \circ f = I_U$ ならば $V = \mathrm{Im} f \oplus \ker g$ が成り立つことを示せ。

定義 2.2.4. $A \in M_{mn}(K)$ に対して、 $B \in M_{nm}(K)$ で $AB = I_m, BA = I_n$（ただし $I_k \in M_{kk}(K)$ は $k \times k$ の単位行列）をみたすものが存在するとき A は正則（可逆、逆行列を持つ、invertible）であるという。B を A の逆行列 (inverse) といい A^{-1} と書く。

A が正則であるときその逆行列 B が一意的に決まることは、定義より明らかである。実際、B_1, B_2 を A の逆行列とするとき $AB_1 = AB_2 = I_m$ であるので、$B_1 = B_1AB_1 = B_1AB_2 = B_2$.

定理 2.2.5. *U, V を有限次元 vector spaces とし、$(a_1, \cdots, a_n)$, $(b_1, \cdots, b_m)$ をそれぞれ U, V の基底とする。さらに $f \in L(U, V)$ とし、f を $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_m)$ に関して表現する行列を $A \in M_{mn}(K)$ とする。このとき*

$$f \text{ が正則} \Leftrightarrow A \text{ が正則}$$

さらに、f^{-1} を $(b_1, \cdots, b_m), (a_1, \cdots, a_n)$ に関して表現する行列は A^{-1} である。

証明. f が正則ならば、f^{-1} の $(b_1, \cdots, b_m), (a_1, \cdots, a_n)$ に関する表現行列を B とすれば命題 2.1.6 より B が A の逆行列であることがわかる。逆に、A が正則ならば A^{-1} を $(b_1, \cdots, b_m), (a_1, \cdots, a_n)$ に関する表現行列とするような $g \in L(V, U)$ をとれば $g = f^{-1}$ となることがわかる。 $\square$

この定理と命題 2.2.2-(3) より次の系がえられる。

系 2.2.6. *$A \in M_{mn}(K)$ とする。A が正則ならば $m = n$.*

2.3 rank

定義 2.3.1. (1) U, V を有限次元のベクトル空間、$f \in L(U, V)$ とする。このとき f の階数 (rank), $\mathrm{rank}\, f$ を $\mathrm{rank}\, f = \dim \mathrm{Im} f$ と定義する。
(2) $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(K)$、$i = 1, \cdots, n$ に対して a_j を A の j 番目の列ベクトルとする。すなわち $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ である。このとき、A の階数 (rank), $\mathrm{rank}\, A$ を $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\,(a_1, \cdots, a_n)$ と定義する。

命題 2.3.2. U, V を有限次元 *vector spaces,* $(e_1, \cdots, e_n), (g_1, \cdots, g_m)$ をそれぞれ U, V の基底とする。さらに $f \in L(U, V)$ とし、f を $(e_1, \cdots, e_n), (g_1, \cdots, g_m)$ に関して表現する行列を $A \in M_{mn}(K)$ とする。このとき

$$\mathrm{rank}\, f = \dim \langle f(e_1), \cdots, f(e_n) \rangle = \mathrm{rank}\,(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = \mathrm{rank}\, A$$

命題 2.3.3. (1) U, V を有限次元 *vector spaces,* $f \in L(U, V)$ とする。このとき

$$f \text{ が正則} \Leftrightarrow \dim U = \dim V = \mathrm{rank}\, f$$

(2) $A \in M_{nn}(K)$ とする。A が正則 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\, A = n.$

以後この節では、U, V を有限次元 vector spaces, $(e_1, \cdots, e_n), (g_1, \cdots, g_m)$ をそれぞれ U, V の基底とする。さらに $f \in L(U, V)$ とし、f を $(e_1, \cdots, e_n), (g_1, \cdots, g_m)$ に関して表現する行列を $A \in M_{mn}(K)$ とする。また A の i 行目の行ベクトルを $\hat{a}_i = (a_{i1} \cdots a_{in})$ とし、$A = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{pmatrix}$ と書く。

命題 2.3.4. $\alpha, \beta \in K$ で $\alpha \neq 0$ とする。いま、$k, l \in \{1, \ldots, m\}$ で $k \neq l$ とし、$(h_1, \cdots, h_m)$ を $i \notin \{k, l\}$ なら $h_i = g_i$, $h_k = g_k - \dfrac{\beta}{\alpha} g_l$, $h_l = \dfrac{1}{\alpha} g_l$ とおく。
(1) $(h_1, \cdots, h_m)$ は V の基底である。
(2) f を $(e_1, \cdots, e_n), (h_1, \cdots, h_m)$ に関して表現する行列を $B \in M_{mn}(K)$ とおく。さらに B の i 行目の行ベクトルを $\hat{b}_i = (b_{i1} \ldots b_{in})$ とおく。このとき、

$$\hat{b}_i = \begin{cases} \hat{a}_i & i \neq l, \\ \alpha \hat{a}_l + \beta \hat{a}_k & i = l. \end{cases} \tag{2.1}$$

が成り立つ。

証明. (1)

$$\begin{aligned} g_l &= \alpha h_l \\ g_k &= h_k + \beta h_l \end{aligned} \tag{2.2}$$

より、$\langle g_1, \ldots, g_m \rangle = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$. よって $V = \langle h_1, \ldots, h_m \rangle$. いま $\dim V = m$ より $(h_1, \ldots, h_m)$ は V の基底。
(2) $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g_j$ に (2.2) を代入すれば、

$$\begin{aligned} f(e_j) = \sum_{i=1, i\neq k,l}^{m} a_{ij} h_i + \alpha a_{lj} h_l + a_{kj}(h_k + \beta h_l) \\ = \sum_{i=1, i \neq l} a_{ij} h_i + (\alpha a_{lj} + \beta a_{kj}) h_l \end{aligned}$$

□

この命題において、A, B はいずれも f を表現する行列であるから $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} f = \operatorname{rank} B$ が成り立つ。従って、行列 A に (2.3) のような変形を施しても rank は変わらないのである。

ここからは行列 A に対して A の rank を計算する方法について述べる。

$A \in M_{mn}(K), A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ とする。このとき A の j-列目の列ベクトルを $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m$ とし、$A = (a_1 \cdots a_n)$ とかく。また、 A の i-行目の行ベクトルを $\hat{a}_i = (a_{i1} \cdots a_{in})$ とし、$A = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{pmatrix}$ とかく。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_1 \cdots a_n) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{pmatrix}$$

このとき

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_m)$$

命題 1.4.7 及び 命題 2.3.4-(2) より次の命題は明らかである。

命題 2.3.5 (rank の計算)**.** $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{mn}(K)$ とする。

(C1) $\pi : \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, m\}$ を一対一の写像とするとき、

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(m)}).$$

(C2) $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq 0$, $i \neq j$ に対して、

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(a_1 \cdots a_i \cdots a_m) = \operatorname{rank}(a_1 \cdots \alpha a_i + \beta a_j \cdots a_m).$$

(R1) $\sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ を一対一の写像とするとき、

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \hat{a}_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

(R2) $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq 0$, $i \neq j$ に対して、

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_i \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \alpha \hat{a}_i + \beta \hat{a}_j \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix}$$

(C1), (C2) の操作を行列の列 (Colum) に関する基本変形、(R1), (R2) の操作を行列の行 (Row) に関する基本変形という。(C1), (C2), (R1), (R2) の操作を繰り返すことで行列の rank を求めることが出来る。

例題 2.3.6. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ -1 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の rank を求めよ。

解答.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ -1 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4c-2\times 3c} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2r+1r,3r-1r]{4r+1r}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2c-7\times 1c]{3c-1c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2r/4,3r\times -1]{4r-2r/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2c-4\times 3c)/(-10)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[3r\leftrightarrow 2r]{3r-3\times 2r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより rank は 3. □

演習 2.9. 次の行列の rank を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 6 & -4 \\ 1 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 9 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 8 & 8 & 19 \\ -2 & 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} a-3 & 2 & 0 \\ 4 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$

定理 2.3.7. $A \in M_{mn}(K)$ とする。このとき $k = \operatorname{rank} A \Leftrightarrow A$ に (C1), (C2), (R1), (R2) の操作を有限回おこなえば、

$$\begin{pmatrix} I_k & O_{k\,n-k} \\ O_{m-k\,k} & O_{m-k\,n-k} \end{pmatrix}$$

になる。

この定理の証明には次の補題を用いる。

補題 2.3.8. $B \in M_{mn}(K)$ で $B \neq 0_{mn}$ とする。このとき B に (C1), (C2), (R1), (R2) の操作を有限回おこなうことで、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{11} & \cdots & c_{1\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{m-1\,1} & \cdots & c_{m-1\,n-1} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

になる。

証明.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \leftrightarrow ir} \begin{pmatrix} b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{1c \leftrightarrow jc}$$

$$\begin{pmatrix} b_{ij} & \cdots & b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1j} & \cdots & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{mj} & \cdots & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{1c/b_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[2 \leq j \leq n]{jc - d_{1j} \times 1c}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & * & \cdots & * \end{pmatrix} \xrightarrow[2 \leq i \leq m]{ir - d_{i1} \times 1r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

□

定理 2.3.10 の証明. $\Leftarrow$ は明らか。
$\Rightarrow$ を $m+n$ に関する帰納法で示す。$m+n=2$ のとき $(m,n)=(1,1),(0,2),(2,0)$. いずれの場合も明らか。

$m+n=N$ まで成立したとする。$m+n=N+1$ としたとき、補題 2.3.8 より (C1), (C2), (R1), (R2) を有限回行うことで、$A \in M_{mn}(K)$ は、(2.3) の形に変形できる。$C=(c_{ij})$ とおくと $C = M_{m-1\,n-1}(K)$ なので、帰納法の仮定より C に対して (C1), (C2), (R1), (R2) を有限回行うことで、目的の形に変形できる。 □

演習 2.10. (1) U, V を有限次元 vector spaces, $h_1 \in L(U), f \in L(U, V), h_2 \in L(V)$ とする。 いま h_1, h_2 が正則ならば、$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} h_2 \circ f \circ h_1$ を示せ。
(2) $A \in M_{mn}(K), B_1 \in M_{nn}(K), B_2 \in M_{mm}(K)$ とする。いま B_1, B_2 が正則ならば $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B_2 A B_1$ を示せ。

演習 2.11. U, V, W を有限次元ベクトル空間、$f \in L(U, V), g \in L(V, W)$ とする。このとき次の (1), (2) を示せ。

(1) $\operatorname{rank} g \circ f = \operatorname{rank} g \Leftrightarrow V = \ker g + \operatorname{Im} f$

(2) $\operatorname{rank} g \circ f = \operatorname{rank} f \Leftrightarrow \ker g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

演習 2.12. $A \in M_{nn}(K)$ とする。$A^3 = A$ であるための必要十分条件は $A^2 = A^4$ かつ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^2$ であることを示せ。

演習 2.13. $A \in M_{nn}(K)$ とする。 $A^{n-1} \neq 0, A^n = 0$ ならば $\operatorname{rank} A = n - 1$ を示せ。

演習 2.14. $A \in M_{nn}(K)$ とする。$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank}(I_n - A) \geq n$ を示せ。

定義 2.3.9. $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{mn}(K)$ に対して、A の転置行列 ${}^t\!A \in M_{nm}(K)$ を A の行と列を入れ替えた行列とする。すなわち

$$
{}^t\!A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

A の i 行目 $\hat{a}_i$ は ${}^t\!A$ の i 列目 ${}^t\hat{a}_i$ であり、A の j 列目 a_j は ${}^t\!A$ の j 行目 ${}^t a_j$ となる。

$$
A = (a_1 \cdots a_n) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_m \end{pmatrix}
$$

に対して、

$$
{}^t\!A = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{pmatrix} = ({}^t\hat{a}_1 \cdots {}^t\hat{a}_m)
$$

となる。

定理 2.3.10. $A \in M_{mn}(K)$ とする。このとき

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^t\!A$$

演習 2.15. $A \in M_{mn}(K), B \in M_{lm}(K)$ とする。このとき ${}^t(BA) = {}^t\!A{}^t\!B$ を示せ。

演習 2.16. (2) $A \in M_{nn}(K)$ とする。このとき

$$A \text{ が正則} \Leftrightarrow {}^t\!A \text{ が正則}$$

を示せ。さらに A が正則ならば $({}^t\!A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ を示せ。

演習 2.17. $K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。U を有限次元 K-ベクトル空間、$f : U \to U$ を線形写像（1次変換）とする。また $I_U : U \to U$ を恒等写像（つまり任意の $u \in U$ に対して $I_U(u) = u$）とする。このとき次の問いに答えよ。
(1) $\alpha \in K$ に対して $V(\alpha) = \{u | u \in U, f(u) = \alpha u\}$ とする。$V(\alpha)$ は U の部分ベクトル空間になることを示せ。
(2) $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ で $\alpha_1 \neq \alpha_2$ とする。このとき $V(\alpha_1) \cap V(\alpha_2) = \{0\}$ を示せ。
(3) $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ で $\alpha_1 \neq \alpha_2$ とするとき、次の不等式を示せ。

$$\operatorname{rank}(f - \alpha_1 I_U) + \operatorname{rank}(f - \alpha_2 I_U) \geq \dim U$$

2.4 双対空間

定義 2.4.1. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とし、U を K-vector space とする。$U^* = L(U, K)$ とし、U^* を U の双対空間 (dual space) という。

$U^* = L(U, K)$ であるので U^* も K-vector space である。

命題 2.4.2. U が有限次元 *vector space* とする。$(a_1, \cdots, a_n)$ を U の基底とするとき、${a_i}^* \in U^*$ を、

$${a_i}^*(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n) = \alpha_i$$

と定義する。このとき $({a_1}^*, \cdots, {a_n}^*)$ は U^* の基底となる。とくに U^* も有限次元 *vector space* であり、$\dim U = \dim U^*$.

上の命題で定義した $({a_1}^*, \cdots, {a_n}^*)$ を $(a_1, \cdots, a_n)$ の双対基底という。

証明. 任意の $h \in U^*$ にたいして、

$$h(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h(a_i) = \sum_{i=1}^{n} h(a_i) {a_i}^* (\alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_n a_n)$$

したがって $h = \sum_{i=1}^n h(a_i){a_i}^*$. これより $U^* = \langle {a_1}^*, \cdots, {a_n}^* \rangle$.

次に $({a_1}^*, \cdots, {a_n}^*)$ が 1 次独立であることを示す。いま、$p = \beta_1 {a_1}^* + \cdots + \beta_n {a_n}^*$ とする。いま $p(a_i) = \beta_i$ であるから $p = 0$ とすれば、任意の i について $\beta_i = 0$. よって $({a_1}^*, \cdots, {a_n}^*)$ は 1 次独立である。 □

定義 2.4.3. U, V を vector spaces, $f \in L(U, V)$ とする。いま ${}^t f : V^* \to U^*$ を ${}^t f(h) = h \circ f$ と定義する。($f : U \to V, h : V \to K$ であるから ${}^t f(h) : U \to K$) ${}^t f$ を f の双対写像という。

${}^t f \in L(V^*, U^*)$ となることは定義より簡単にわかる。

演習 2.18. U, V を vector spaces とする。このとき $f \in L(U, V)$ に対して ${}^t f \in L(V^*, U^*)$ を対応させる $L(U, V)$ から $L(V^*, U^*)$ の写像は linear であることを示せ。

命題 2.4.4. U, V を有限次元 *vector space*、$(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_m)$ をそれぞれ U, V の基底とする。さらに $f \in L(U, V)$ に対して、f を $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_m)$ に関して表現する行列を A とする。このとき f の双対写像 ${}^t f \in L(V^*, U^*)$ を $({b_1}^*, \cdots, {b_m}^*), ({a_1}^*, \cdots, {a_n}^*)$ に関して表現する行列は ${}^t A$ である。

証明. ${}^t f$ を $({b_1}^*, \cdots, {b_m}^*), ({a_1}^*, \cdots, {a_n}^*)$ に関して表現する行列を $B = (b_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ とする。このとき ${}^t f({b_j}^*) = \sum_{i=1}^n b_{ij} {a_i}^*$. よって、${}^t f({b_j}^*)(a_k) = b_{kj}$. ここで ${}^t f({b_j}^*)(a_k) = {b_j}^*(f(a_k)) = {b_j}^*(\sum_{l=1}^m a_{lk} b_l) = a_{jk}$. したがって $b_{kj} = a_{jk}$. □

定理 2.4.5. U, V を有限次元 *vector space,* $f \in L(U, V)$ とする。このとき $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im} {}^t f$.

証明. 系 2.1.9 より $k = \dim \mathrm{Im} f$ とするとき U の基底 $(a_1, \cdots, a_n)$, V の基底 $(b_1, \cdots, b_m)$ で f を表現する行列が $\begin{pmatrix} I_k & 0_{k\, n-k} \\ 0_{m-k\, k} & 0_{m-k\, n-k} \end{pmatrix}$ となるものがある。${}^t f$ を双対基底に関して表現する行列は、$\begin{pmatrix} I_k & 0_{k\, m-k} \\ 0_{n-k\, k} & 0_{n-k\, m-k} \end{pmatrix}$ となる。このとき、$\dim \mathrm{Im} {}^t f = k$. □

演習 2.19. U, V, W を vector spaces, $f \in L(U, V), g \in L(V, W)$ とする。このとき ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$ を示せ。

演習 2.20. U, V を有限次元 vector spaces, $f \in L(U, V)$ とする。 このとき

$$f \text{ が正則} \Leftrightarrow {}^t f \text{ が正則}$$

を示せ。さらに f が正則ならば $({}^t f)^{-1} = {}^t(f^{-1})$ を示せ。

Chapter 3

行列式

3.1 行列式 I (3×3 の場合)

2×2-行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{が逆行列を持つ} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$

は知られている。3×3-行列の場合はどうなるか？$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする。このとき、

$$A \text{ が逆行列を持つ} \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = 3.$$

補題 3.1.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つ $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0.$

証明. $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ である。いま、

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ d \end{pmatrix} \right) \text{が 1 次独立} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right) \text{が 1 次独立} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が逆行列を持つ $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0.$ □

さて、$a_{11} \neq 0$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{1c/a_{11}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}/a_{11} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}/a_{11} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3c-a_{13}\times 1c]{2c-a_{12}\times 1c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/a_{11} & a_{22}-a_{12}a_{21}/a_{11} & a_{23}-a_{13}a_{21}/a_{11} \\ a_{31}/a_{11} & a_{32}-a_{12}a_{31}/a_{11} & a_{33}-a_{13}a_{31}/a_{11} \end{pmatrix}$$

補題 3.1.1 より A が逆行列をもつ $\Leftrightarrow$

$$0 \neq \big(a_{22}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}\big)\big(a_{33}-\frac{a_{13}a_{31}}{a_{11}}\big)-\big(a_{23}-\frac{a_{13}a_{21}}{a_{11}}\big)\big(a_{32}-\frac{a_{12}a_{31}}{a_{11}}\big) = \frac{a_{11}a_{22}a_{33}-a_{22}a_{13}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{11}a_{32}+a_{23}a_{12}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}}{a_{11}}$$

定義 3.1.2. 3×3 行列 $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ に対して、A の行列式 (determinant), $\det A$ あるいは $|A|$ を、

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

と定義する。

定理 3.1.3. 3×3 行列 $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ が逆行列を持つ $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

証明. $a_{11}\neq 0$ のときは上の計算から明らか。$a_{11}=0$ のときは、$A\neq 0$ として、$a_{ij}\neq 0$ となるものに注目して (C1), (R1) の変形をおこない、$a_{11}\neq 0$ の場合に帰着する。 □

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ に対して } a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

とおく。すなわち $A=(a_1\, a_2\, a_3)$. このとき $|A| = D(a_1,a_2,a_3)$ と書くことにする。

命題 3.1.4. (1) $a,b\in K^3, \alpha,\beta\in K$ とするとき、

$$\begin{aligned} D(\alpha a+\beta b, a_2, a_3) &= \alpha D(a,a_2,a_3)+\beta D(b,a_2,a_3) \\ D(a_1, \alpha a+\beta b, a_3) &= \alpha D(a_1,a,a_3)+\beta D(a_1,b,a_3) \\ D(a_1,a_2,\alpha a+\beta b) &= \alpha D(a_1,a_2,a)+\beta D(a_1,a_2,b) \end{aligned}$$

(2) $D(a_1, a_3, a_2) = D(a_2, a_1, a_3) = D(a_3, a_2, a_1) = -D(a_1, a_2, a_3)$

(3) $\alpha, \beta \in K$ に対して

$$\begin{aligned}
&D(\alpha a_1 + \beta a_2, a_2, a_3) = D(\alpha a_1 + \beta a_3, a_2, a_3)\\
=&D(a_1, \alpha a_2 + \beta a_1, a_3) = D(a_1, \alpha a_2 + \beta a_3, a_3)\\
=&D(a_1, a_2, \alpha a_3 + \beta a_1) = D(a_1, a_2, \alpha a_3 + \beta a_2)\\
=&\alpha D(a_1, a_2, a_3)
\end{aligned}$$

(4) $|A| = |{}^t A|$

証明. (1), (2), (4) は行列式の定義に代入してみればわかる。(3) については、例えば、(1) より

$$D(\alpha a_1 + \beta a_2, a_2, a_3) = \alpha D(a_1, a_2, a_3) + \beta D(a_2, a_2, a_3)$$

いま (a_2, a_2, a_3) は 1 次独立でないので、$(a_2\, a_2\, a_3)$ は逆行列をもたない。よって $D(a_2, a_2, a_3) = 0$. □

この命題より (C1), (C2), (R1), (R2) の変形をおこなったとき、行列式の値がどのように変わるかがわかる。

例題 3.1.5. $\begin{vmatrix} 1-k & -4 & -2 \\ 2 & 7-k & 4 \\ 4 & 10 & 6+k \end{vmatrix}$ を求めよ。

解答.

$$\begin{vmatrix} 1-k & -4 & -2 \\ 2 & 7-k & 4 \\ 4 & 10 & 6+k \end{vmatrix} \overset{2c-2\times 3c}{=} \begin{vmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 2 & -(k+1) & 4 \\ 4 & -2(k+1) & 6+k \end{vmatrix} =$$

$$-(k+1)\begin{vmatrix} 1-k & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 6+k \end{vmatrix} \overset{1c-2\times 2c}{=} -(k+1)(1-k)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6+k \end{vmatrix} \overset{3r-2\times 2r}{=}$$

$$(k+1)(k-1)(k-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (k+1)(k-1)(k-2).$$

□

演習 3.1. 次の行列式を計算せよ。

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad (2)\quad \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \qquad (3)\quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a+x & a+y & a+z \\ b+x & b+y & b+z \\ c+x & c+y & c+z \end{vmatrix} \qquad (5)\quad \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

$$(6)\quad \begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

演習 3.2. 次の等式を証明せよ。

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

$$(4)\quad \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$$

演習 3.3. 3 角形 ABC の 3 つの角 A, B, C に対して次の式を示せ。

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

3.2 行列式 II（一般の次元）

定理 3.2.1. $K = \mathbb{R}$ *or* $\mathbb{C}$ とする。K^n の n 個のベクトル $a_1, \cdots, a_n \in K^n$ に対して $D_n(a_1, \cdots, a_n) \in K$ を対応させる写像 $D_n : K^n \times \cdots \times K^n \to K$ で次の (DT1), (DT2), (DT3) をみたすものが唯一つ存在する。

(DT1) 任意の $i \in \{1, \cdots, n\}$, 任意の $\alpha, \beta \in K^n$, 任意の $\alpha, \beta \in K$ に対して、

$$D_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{\alpha a + \beta b}, \cdots, a_n)$$
$$= \alpha D_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a}, \cdots, a_n) + \beta D_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{b}, \cdots, a_n)$$

(DT2) 任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対して、

$$D_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a_j}, \cdots, \underset{j\text{ 番目}}{a_i}, \cdots, a_n)$$
$$= -D_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a_i}, \cdots, \underset{j\text{ 番目}}{a_j}, \cdots, a_n)$$

(DT3) $D_n(e_1, \cdots, e_n) = 1$ ただし $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i$ 番目 $(i = \{1, \cdots, n\}$.

定義 3.2.2. $n \times n$ 行列 $A = (a_1 \cdots a_n)$ （ただし $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対して a_j は A の j 列目の列ベクトル) とする。このとき A の行列式 (determinant) $|A|$ または $\det A$ を、$|A| = D_n(a_1, \cdots, a_n)$ と定義する。

定理 3.2.1 の証明は 2 つの部分に分けておこなう。

定理 *3.2.1* の証明（第 1 部）. まず (DT1), (DT2), (DT3) をみたす D_n が存在することを示す。n についての数学的帰納法を用いる。$n = 1, 2, 3$ ではすでに示された。それらをそれぞれ D_1^*, D_2^*, D_3^* とおく。
D_{n-1}^* が (DT1), (DT2), (DT3) をみたすと仮定する。このとき $j = 1, \cdots, n$ に対して $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, $b_j = \begin{pmatrix} a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ として、

$$D_n^*(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} D_{n-1}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, b_n)$$

と定義する。ただし $\overset{\times}{b_j}$ は b_j をとばすことを表す。例えば $(\overset{\times}{b_1}, b_2, \cdots, b_n) = (b_2, \cdots, b_n)$, $(b_1, \overset{\times}{b_2}, b_3, \cdots, b_n) = (b_1, b_3, \cdots, b_n)$.
(DT1) の証明：$a_1, \cdots, a_n \in K^n, a_i = \alpha a + \beta b$ とする。このとき $a = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, a' = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, b' = \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ とおけば、D^*_{n-1} が (DT1) をみたすことより、

$$\begin{aligned}
&D^*_n(a_1, \cdots, a_n) \\
=&\alpha \sum_{j:1\le j\le n, j\ne i} (-1)^{j-1} a_{1j} D^*_{n-1}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a'}, \cdots, b_n) \\
&+\beta \sum_{j:1\le j\le n, j\ne i} (-1)^{j-1} a_{1j} D^*_{n-1}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{b'}, \cdots, b_n)) \\
&+(-1)^{i-1}(\alpha u_i + \beta v_i) D_{n-1^*}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_i}, \cdots, b_n) \\
=&\alpha D^*_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a}, \cdots, a_n) + \beta D^*_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{b}, \cdots, a_n)
\end{aligned}$$

(DT2) の証明：$1 < i$ とする。

$$\begin{aligned}
&D^*_n(a_i, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a_1}, \cdots, a_n) = a_{1i} D^*_{n-1}(b_2, \cdots, b_{i-1}, b_1, b_{i+1}, \cdots, b_n) \\
&+(-1)^{i-1} a_{11} D^*_{n-1}(b_i, b_2, \cdots, b_{i-1}, b_{i+1}, \cdots, b_n) \\
&+\sum_{j:1\le j\le n, j\ne 1,i} (-1)^{j-1} D^*_{n-1}(b_i, b_2, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, b_1, \cdots, b_n)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

いま D^*_{n-1} は (DT2) をみたすので、

$$\begin{aligned}
&D^*_{n-1}(b_2, \cdots, b_{i-1}, b_1, b_{i+1}, \cdots, b_n) = (-1) D^*_{n-1}(b_2, \cdots, b_1, b_{i-1}, b_{i+1}, \cdots, b_n) \\
&= \cdots = (-1)^{i-2} D^*_{n-1}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_i}, \cdots, b_n)
\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}
D^*_{n-1}(b_i, b_2, \cdots, b_{i-1}, b_{i+1}, \cdots, b_n) &= (-1)^{i-2} D^*_{n-1}(b_2, \cdots, b_n) \\
D^*_{n-1}(b_i, b_2, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, b_1, \cdots, b_n) &= (-1) D^*_{n-1}(b_1, \cdots, \overset{\times}{b_j}, \cdots, b_n)
\end{aligned}$$

これらを (3.1) に代入すれば、$D_n^*(a_i, a_2, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a_1}, \cdots, a_n) = (-1)D_n^*(a_1, \cdots, a_n)$.
一般の場合もこれより明らかである。
(DT3) は D_n^* の定義から直接計算すれば明らか。

以上より上で定義した D_n^* は (DT1), (DT2), (DT3) をみたす。 □

命題 3.2.3. D_n は (DT1), (DT2), (DT3) をみたすとする。このとき

(1) ある $i \neq j$ で $a_i = a_j$ ならば $D_n(a_1, \cdots, a_n) = 0$.

(2) $\alpha, \beta \in K$, $i \neq j$ に対して、

$$D_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{\alpha a_i + \beta a_j}, \cdots, a_n) = \alpha D_n(a_1, \cdots, \underset{i\text{ 番目}}{a_i}, \cdots, a_n)$$

(3) $\pi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ を *1* 対 *1* の写像とする。このとき $\operatorname{sgn} \pi = D_n^*(e_{\pi(1)}, \cdots, e_{\pi(n)})$ と定義すれば、

$$D_n(a_{\pi(1)}, \cdots, a_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn} \pi D_n(a_1, \cdots, a_n)$$

証明. (1) 簡単のため $a_1 = a_2$ とする。このとき、(DT2) より $D_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = -D_n(a_2, a_1, \cdots, a_n)$. $a_1 = a_2$ より $D_n(a_1, a_1, \cdots, a_n) = D_n(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 従って $D_n(a_1, \cdots, a_n) = 0$.
(2) (DT1) より $D_n(a_1, \cdots, \alpha a_i + \beta a_j, \cdots, a_n) = \alpha D_n(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + \beta D_n(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n)$. ここで (1) を用いれば $D_n(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = 0$ である。よって (2) が示された。 □

(3) を示すために少し準備をする。

定義 3.2.4. $S_n = \{\pi | \pi : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}, \pi$ は 1 対 1$\}$ とする。S_n を n 次の置換群 (permutation group) といい、$\pi \in S_n$ を n 次の置換 (permutation) という。$\pi \in S_n$ を $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$ のように表す。
$1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ に対して、$\sigma_{i,j} \in S_n$ を、

$$\sigma_{i,j}(k) = \begin{cases} j & k = i, \\ i & k = j, \\ k & k \text{ が } i, j \text{ 以外}. \end{cases}$$

とおく。$\sigma_{i,j}$ を i, j の互換といい (i, j) と表すこともある。

$\pi \in S_n$ は $(1,2,\cdots,n)$ の $(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))$ への並べ変えを表すと考えることができる。 i,j の互換 $\sigma_{i,j}$ は i と j を入れ換えることを意味する。任意の置換（並べ換え）は互換（入れ換え）を有限回おこなうことで得られる。

例 3.2.5. (1) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$(1,2,3,4) \xrightarrow{(1,4)} (4,2,3,1) \xrightarrow{(1,3)} (4,2,1,3) \xrightarrow{(1,2)} (4,1,2,3)$$

すなわち $\pi = \sigma_{1,2} \circ \sigma_{1,3} \circ \sigma_{1,4}$
(2) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(1,2,3) \xrightarrow{(1,3)} (3,2,1) \xrightarrow{(1,2)} (3,1,2)$$

あるいは

$$(1,2,3) \xrightarrow{(1,2)} (2,1,3) \xrightarrow{(1,3)} (2,3,1) \xrightarrow{(2,3)} (3,2,1) \xrightarrow{(1,2)} (3,1,2)$$

定理 3.2.6. 任意の $\pi \in S_n$ に対して、ある互換の列 $(i_1,j_1),\cdots,(i_m,j_m)$ があって $\pi = \sigma_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ \sigma_{i_1,j_1}$. さらにこのとき

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^m$$

である。

証明. n に関する帰納法を用いる。$n=1$ のときは $S_1 = \{$ 恒等写像 $\}$ より明らか。（恒等写像は 0 個の互換で表されると考える。）
$n-1$ まで正しいとする。$\pi \in S_n$ とする。$\pi(n)=n$ ならば、$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n-1) \end{pmatrix} \in S_{n-1}$ は帰納法の仮定より互換の合成で表される。よって π は互換の合成で表せる。$\pi(n) \neq n$ のとき、$\sigma = \sigma_{\pi(n),n} \circ \pi$ とおけば、$\sigma(n) = n$. よって σ は互換の合成で表される。ここで $\pi = \sigma_{\pi(n),n} \circ \sigma$ より π も互換の合成で表される。

$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^m$ は (DT2), (DT3) より明らか。 □

系 3.2.7. $\pi \in S_n$, 互換の列 $(i_1,j_1),\cdots,(i_m,j_m)$ および $(k_1,l_1),\cdots,(k_p,l_p)$ に対して、$\pi = \sigma_{i_m,j_m} \circ \cdots \circ \sigma_{i_1,j_1} = \sigma_{k_p,l_p} \circ \cdots \circ \sigma_{k_1,l_1}$ とする。このとき m,p の偶、奇は一致する。（すなわち $|m-p|$ は偶数）

証明. $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^m = (-1)^p$ より明らか。 $\square$

以上の結果より命題 3.2.3-(3) は明らかである。

命題 3.2.8. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{nn}(K)$ とする。a_j および b_j をそれぞれ A, B の j 列目の列ベクトルとする。すなわち $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$.

さらに $C = BA$ とおき C の j 列目の列ベクトル $c_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$ とする。このとき

$$D_n(c_1, \cdots, c_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi a_{\pi(1)\,1} a_{\pi(2)\,2} \cdots a_{\pi(n)\,n} D_n(b_1, \cdots, b_n).$$

証明. $c_j = a_{1j}b_1 + a_{2j}b_2 + \cdots + a_{nj}b_n$ であるので、

$$\begin{aligned}
&D_n(c_1, \cdots, c_n) = D_n(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} b_{i_1}, c_2, \cdots, c_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} D_n(b_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} b_{i_2}, \cdots, c_n) = \sum_{i_1, i_2=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} D_n(b_{i_1}, b_{i_2}, c_3, \cdots, c_n) \\
&= \sum_{i_1, \cdots, i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D_n(b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_n})
\end{aligned}$$

ここで 命題 3.2.3-(1), (3) より $D_n(b_{i_1}, \cdots, b_{i_n}) =$

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} D_n(b_1, \cdots, b_n) & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{が置換} \\ \quad 0 & \text{ある } k \neq l \text{ に対して } i_k = i_l. \end{cases}$$

従って、この命題が成立する。 $\square$

定理 3.2.9. (DT1), (DT2), (DT3) をみたす D_n は、

$$D_n(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi a_{\pi(1)\,1} a_{\pi(2)\,2} \cdots a_{\pi(n)\,n}$$

を満たす。

証明. 命題 3.2.8 で $B = I_n$ とすれば明らか。 □

定理 *3.2.1* の証明（第２部）. D_n の一意性は定理 3.2.9 より明らか。 □

命題 3.2.10. $A, B \in M_{nn}(K)$ とする。このとき

$$|AB| = |A||B|$$

証明. 命題 3.2.8 より明らか。 □

定理 3.2.11. $A \in M_{nn}(K)$ とする。このとき

$$A \text{ が正則} \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

さらに A が正則ならば $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

証明. $\Rightarrow$: A が正則のとき $AA^{-1} = I_n$. 従って $1 = |I_n| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$. よって $|A| \neq 0$.
$\Leftarrow$: A が正則でないとする。このとき $A = (a_1 \cdots a_n), a_1, \cdots, a_n \in K^n$ とすると、$(a_1, \cdots, a_n)$ は 1 次独立でない。従って、ある j に対して、

$$a_j = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{j-1} a_{j-1} + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \cdots + a_n$$

と書ける。このとき、命題 3.2.3-(1) より

$$|A| = D_n(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = \sum_{i=1,\cdots,n, i\neq j} \alpha_i D_n(a_1, \cdots, \underset{j\text{ 番目}}{a_i}, \cdots, a_n) = 0$$

□

定理 3.2.12. $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(K)$ とする。このとき $|A| = |{}^tA|$. すなわち

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}.$$

証明. ${}^tA = (b_{ij})$ とするとき $b_{ij} = a_{ji}$ より、

$$|{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}$$

ここで σ は $\{1, \cdots, n\}$ からそれ自身への 1 対 1 の写像であるので、逆写像 σ^{-1} が存在する。ここで、$\sigma = \sigma_{i_m, j_m} \circ \cdots \circ \sigma_{i_1, j_1}$ ならば $\sigma^{-1} = \sigma_{i_1, j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_m, j_m}$ である。従って、$\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma^{-1}$. さらに $\pi = \sigma^{-1}$ とすれば、

$$a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} = a_{\pi(1)\,1} a_{\pi(2)\,2} \cdots a_{\pi(n)\,n}$$

である。さらに $\sigma \leftrightarrow \sigma^{-1}$ は S_n 上の 1 対 1 対応であるので、

$$\begin{aligned}|{}^tA| &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\,\sigma(1)}a_{2\,\sigma(2)}\cdots a_{n\,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} a_{\sigma^{-1}(1)\,1}a_{\sigma^{-1}(2)\,2}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)\,n} \\ &= \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi a_{\pi(1)\,1}a_{\pi(2)\,2}\cdots a_{\pi(n)\,n} = |A|\end{aligned}$$

□

例 3.2.13. $\pi = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&5&3\end{pmatrix} \in S_5$ に対して、

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix}2&4&1&5&3\\1&2&3&4&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&2&4\end{pmatrix}$$

定理 3.2.12 より行列式に対して、列に関して成り立つ事項（(DT1), (DT2) および 命題 3.2.3）は行に対しても成り立つことがわかる。すなわち、

命題 3.2.14. $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(K)$ の i 行目の行ベクトルを $\hat{a}_i = (a_{i1}\cdots a_{in})$ とする。(${}^ta_i \in K^n$) このとき

$$|A| = \begin{vmatrix}\hat{a}_1\\ \vdots\\ \hat{a}_n\end{vmatrix}$$

と書けば、次の (1), (2), (3) が成立する。

(1) $\alpha, \beta \in K$, ${}^ta, {}^tb \in K^n$ に対して、$\hat{a}_k = \alpha a + \beta b$ ならば、

$$|A| = \alpha\begin{vmatrix}\hat{a}_1\\ \vdots\\ a\\ \vdots\\ \hat{a}_n\end{vmatrix} k \text{ 行目} + \beta\begin{vmatrix}\hat{a}_1\\ \vdots\\ b\\ \vdots\\ \hat{a}_n\end{vmatrix} k \text{ 行目}$$

(2) $\pi \in S_n$ に対して、

$$\begin{vmatrix}\hat{a}_{\pi(1)}\\ \vdots\\ \hat{a}_{\pi(n)}\end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\pi\begin{vmatrix}\hat{a}_1\\ \vdots\\ \hat{a}_n\end{vmatrix}$$

(3) $i \neq j$, $\alpha, \beta \in K$ に対して、

$$\begin{vmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \alpha\hat{a}_i + \beta\hat{a}_j \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{vmatrix} i \text{ 行目} = \alpha \begin{vmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_i \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{vmatrix} i \text{ 行目}$$

例題 3.2.15. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ をみたす x を求めよ。

解答.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{1c+(2c+3c+4c)}{=} (2x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \underset{4c-x\times 1c}{\overset{2c-1c}{=}}$$

$$(2x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & x & 1-x \\ 1 & x-1 & x & -x \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{2c+3c}{\overset{ir-1r(i=2,3,4)}{=}} (4x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1-x \\ 0 & 1 & x & -x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{4c+x\times 3c}{\overset{3c-x\times 2c}{=}} (4x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{2r-3r}{=} (4x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

従って与えられた行列式は $(4x^2-1)D_4(e_1, e_3, e_4, e_2) = (4x^2-1)$. よって $x = 1/2, -1/2$. □

演習 3.4. 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \\ 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$

演習 3.5. 次の方程式をみたす実数 x の値をすべて求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & x^3 & x^2 & x \\ x & 1 & x^3 & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3.3 余因子と逆行列

定理 3.2.1 の証明をみれば、$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_{nn}(K)$ に対して、

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

が成立することがわかる。いま行に対して互換 $(i, i-1)$, $(i-1, i-2)$, $\cdots$, $(2, 1)$ を続けておこなえば、

$$|A| = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

これに (3.2) を適用して、

$$|A| = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij} |A_{ij}|, \tag{3.3}$$

ただし A_{ij} は A から i 行と j 列を取り除いた $(n-1)\times(n-1)$ 行列である。すなわち、

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定義 3.3.1. $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_{nn}(K)$ に対して、

$$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

を A の (i,j)-余因子 (cofactor) という。

定理 3.3.2. $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_{nn}(K)$ に対して、

$$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\tilde{a}_{lj}=\begin{cases}|A| & (k=l)\\ 0 & (k\neq l)\end{cases}$$

証明. $k=l$ のときは定義 3.3.1 と (3.3) より明らか。

$k\neq l$ のとき、B を A の l 行目を k 行目で置き換えた行列とする。すなわち $\hat{a}_i,\hat{b}_i$ をそれぞれ A,B の i 行目の行ベクトルとするとき、

$$\hat{b}_i=\begin{cases}\hat{a}_i & (i\neq l)\\ \hat{a}_k & (i=l)\end{cases}$$

ここで $B=(b_ij)$ とすれば、$k=l$ の場合より、$\sum_{j=1}^{n}b_{lj}\tilde{b}_{lj}=|B|$. いま $\hat{b}_k=\hat{b}_l$ より $|B|=0$ さらに $b_{lj}=a_{kj},\tilde{b}_{lj}=\tilde{a}_{lj}$ であるので、$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\tilde{a}_{lj}=0$. □

${}^tA$ にこの定理を用いれば、

系 3.3.3. $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_{nn}(K)$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\tilde{a}_{il}=\begin{cases}|A| & (k=l)\\ 0 & (k\neq l)\end{cases}$$

定理 3.3.2 および系 3.3.3 において $k=l$ の場合を $|A|$ の余因子展開という。定理 3.3.2 および系 3.3.3 より

定理 3.3.4. $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_{nn}(K)$ に対して、その余因子行列 $\widetilde{A}$ を $\widetilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{1\le i,j\le n}$ と定義するとき、

$${}^t\widetilde{A}A=A{}^t\widetilde{A}=|A|I_n.$$

特に、A が正則のときは、

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}{}^t\widetilde{A}.$$

演習 3.6. $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

例題 3.3.5. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする。 $x, y \in K$ に対して、$A_n \in M_{nn}(K)$ を

$$A_n = \begin{pmatrix} x+y & x & 0 & \cdots & 0 \\ y & x+y & x & \ddots & \vdots \\ 0 & y & x+y & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & y & x+y \end{pmatrix}$$

とおく。このとき

$$|A_n| = x^n + x^{n-1}y + \ldots + xy^{n-1} + y^n$$

が成り立つことを示せ。

解答. 帰納法を用いる。$|A_1| = x + y$, $|A_2| = x^2 + xy + y^2$ より $n = 1, 2$ では成立。

$n \geq 3$ として、$1, \ldots, n-1$ では成立と仮定する。余因子展開を用いれば、

$$\begin{aligned} |A_n| &= (x+y)|A_{n-1}| - x \begin{vmatrix} y & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x+y & x & \ddots & \vdots \\ 0 & y & x+y & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & y & x+y \end{vmatrix} \\ &= (x+y)|A_{n-1}| - xy|A_{n-2}| \end{aligned}$$

$n-1$, $n-2$ で成り立つので、

$$\begin{aligned} |A_n| &= (x+y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + x^{n-3}y + \ldots + y^{n-2}) \\ &= x^n + x^{n-1}y + \ldots + xy^{n-1} + y^n \end{aligned}$$

□

演習 3.7. $A \in M_{mm}(K), B \in M_{mn}(K), C \in M_{nn}(K)$ とするとき

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C| \tag{3.4}$$

が成立することを示せ。

[ヒント：n と C は固定し、m に関する帰納法を用いる。]

演習 3.8. $A, B \in M_{nn}(K)$ に対して、

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$$

が成立することを示せ。

[ヒント：$i = 1, \ldots, n$ について、$n+i$ 行目に n 行目を加える行に関する基本変形と行う。そののち、$j = 1, \ldots, n$ に対して j 列目から $n+j$ 列目を引く列に関する基本変形を行う。]

演習 3.4 の略解
(1) 0 （1 列目に 2 列目、3 列目、4 列目を全て加えると、1 列目の成分は全て 34 になる。）
(2) $(x+y-2)(x+y+2)(x-y)^2$
(3) $8abcd$

演習 3.5 の略解
与えられた行列式は $(1-x^4)^3$ となる。よって $x^4-1=(x+1)(x-1)(x^2+1)=0$.
x は実数なので $x=1,-1$.

Chapter 4

基底の変換と固有ベクトル

$e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^2$ を $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。ここで、$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を基底 (e_1, e_2, e_3) に関してする表現行列が

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

である linear map とする。このとき、$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすれば、$Af_1 = f_1$, $Af_2 = -f_2$, $Af_3 = 2f_3$ が成り立つ。ここで、$\operatorname{rank}(f_1, f_2, f_3) = 3$ はであり、(f_1, f_2, f_3) は $\mathbb{R}^3$ の基底になっている。F を (f_1, f_2, f_3) に関して表現する行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。さて、$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ の (f_1, f_2, f_3) に関する座標を $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とするとき、

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

となる。すなわち $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$x = Py$$

が成り立つ。ここで、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.1 基底の変換と１次変換

$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, V を K-vector space とする。さらに $(e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n)$ を V の基底とする。$v \in V$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を、$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, $(f_1, \cdots, f_n)$ に関する座標を $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ とするとき、x と y の関係を調べる。

f_j の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を $\begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$ とする。すなわち、$f_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$ である。いま $v = y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n$ であり、この両辺の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関す

る座標を考えれば、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} &= y_1\begin{pmatrix}p_{11}\\ \vdots\\ p_{n1}\end{pmatrix}+\cdots+y_n\begin{pmatrix}p_{1n}\\ \vdots\\ p_{nn}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}p_{11} & \cdots & p_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ p_{n1} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.1}$$

ここで、$P=(p_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in M_{nn}(K)$ とすれば、

$$x=Py.$$

この P を $(e_1,\cdots,e_n)$ から $(f_1,\cdots,f_n)$ への基底変換の行列という。以上をまとめれば、

定理 4.1.1. V を有限次元 K-*vector space,* $(e_1,\cdots,e_n),(f_1,\cdots,f_n)$ を V の基底とする。いま f_j の $(e_1,\cdots,e_n)$ に関する座標を $p_j\in K^n$ とし、$P\in M_{nn}(K)$ を $P=(p_1\cdots p_n)$ とおく。(すなわち P はその j 列目の列ベクトルが p_j であるような行列) このとき P は正則であり、任意の $v\in V$ に対して、v の $(e_1,\cdots,e_n)$ に関する座標を $x\in K^n$, $(f_1,\cdots,f_n)$ に関する座標を $y\in K^n$ とすれば、

$$x=Py$$

が成立する。

証明. 証明すべきことは P が正則であること。いま $(f_1,\cdots,f_n)$ から $(e_1,\cdots,e_n)$ への基底変換の行列を $Q\in M_{nn}(K)$ とおく。$v\in V$ に対して $x,y\in K^n$ をそれぞれ v の $(e_1,\cdots,e_n),(f_1,\cdots,f_n)$ に関する座標とすれば、$x=Py,y=Qx$. 従って $x=PQx,y=QPy$. これが任意の $x,y\in K^n$ について成り立つのであるから $PQ=QP=I_n$. すなわち P は正則であり、$Q=P^{-1}$. □

定理 4.1.2. U を有限次元 K-*vector space,* $(e_1,\cdots,e_n)$ を U の基底とする。このとき任意の正則な $P\in M_{nn}(K)$ に対してある U の基底 $(f_1,\cdots,f_n)$ で、$(e_1,\cdots,e_n)$ から $(f_1,\cdots,f_n)$ への基底変換の行列が P となるものがただひとつ存在する。

証明. $P=(p_{ij})$ とするとき、$j=1,\cdots,n$ に対して、$f_j=p_{1j}e_1+\cdots+p_{nj}e_j$ と定義する。このとき、$\operatorname{rank}(f_1,\cdots,f_n)=\operatorname{rank}P=n$ である。従って $(f_1,\cdots,f_n)$ は 1 次独立であり、補題 1.3.11 より $(f_1,\cdots,f_n)$ は U の基底に

なる。このとき $f_1,\cdots,f_n$ の定義より明らかに $(e_1,\cdots,e_n)$ から $(f_1,\cdots,f_n)$ への基底変換の行列は P である。このような $(f_1,\cdots,f_n)$ が唯一つしかないことは明らか。 $\square$

例 4.1.3. $V=\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ とする。V の基底として $(1,x,x^2)$ および $(1+x,1-2x,-1+x+x^2)$ を考える。$1+x,1-2x,-1+x+x^2$ の $(1,x,x^2)$ に関する座標はそれぞれ、$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ であるので、$(1,x,x^2)$ から $(1+x,1-2x,-1+x+x^2)$ への基底変換の行列は、

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

次に基底を取り換えたとき、1 次変換を表現する行列がどのように変わるかを考察する。

U,V を有限次元 K-vector space, $f\in L(U,V)$ とする。いま

$$\begin{aligned}(e_1,\cdots,e_n),(f_1,\cdots,f_n)&:U\ \text{の基底},\\(a_1,\cdots,a_m),(b_1,\cdots,b_m)&:V\ \text{の基底},\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}&P\in M_{nn}(K):(e_1,\cdots,e_n)\ \text{から}\ (f_1,\cdots,f_n)\ \text{への基底変換の行列},\\&Q\in M_{mm}(K):(a_1,\cdots,a_m)\ \text{から}\ (b_1,\cdots,b_m)\ \text{への基底変換の行列},\\&A\in M_{mn}(K):(e_1,\cdots,e_n),(a_1,\cdots,a_m)\ \text{に関する}\ f\ \text{の表現行列},\\&B\in M_{mn}(K):(f_1,\cdots,f_n),(b_1,\cdots,b_m)\ \text{に関する}\ f\ \text{の表現行列}\end{aligned}$$

とする。このとき A と B の関係を考察する。

$$\begin{array}{ccccccc}U&\xrightarrow{(f_1,\cdots,f_n)}&K^n&\xrightarrow{P}&K^n&\xleftarrow{(e_1,\cdots,e_n)}&U\\\Big\downarrow f&&\Big\downarrow B&&\Big\downarrow A&&\Big\downarrow f\\V&\xrightarrow{(b_1,\cdots,b_n)}&K^m&\xrightarrow{Q}&K^m&\xleftarrow{(a_1,\cdots,a_n)}&V\end{array}$$

いま $u\in U$ に対して $v=f(u)\in V$ とする。ここで u の $(e_1,\cdots,e_n),(f_1,\cdots,f_n)$ に関する座標をそれぞれ $x,y\in K^n$、v の $(a_1,\cdots,a_n),(b_1,\cdots,b_n)$ に関する座標をそれぞれ $z,w\in K^m$ とすれば、

$$z=Ax,w=By,x=Py,z=Qw.$$

従って、$Qw = z = Ax = APy$ より $w = Q^{-1}APy$. これが任意の $y \in K^n$ に対して成り立つのであるから

$$B = Q^{-1}AP$$

以上をまとめれば、

定理 4.1.4. U, V, f などを上で与えた通りとするとき、

$$B = Q^{-1}AP$$

とくに、$U = V, (a_1, \cdots, a_m) = (e_1, \cdots, e_n), (b_1, \cdots, b_m) = (f_1, \cdots, f_n)$ のときは、

$$B = P^{-1}AP$$

定義 4.1.5. $A, B \in M_{nn}(K)$ に対して、ある正則な $P \in M_{nn}(K)$ が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき、A と B は相似な行列であるという。

A と B が相似な行列ならば、

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P|^{-1}|A||P| = |A|$$

定理 4.1.2 と相似な行列の定義より次の定理が得られる。

定理 4.1.6. U を有限次元 K-*vector space,* $f \in L(U)$, $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底、A を $(e_1, \cdots, e_n)$ に関して f を表現する行列とする。いま B を A と相似な行列とする。このとき、U の基底 $(f_1, \cdots, f_n)$ で、$(f_1, \cdots, f_n)$ に関して f を表現する行列が B になるものがただひとつ存在する。

例題 4.1.7. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底 (e_1, e_2, e_3) から (f_1, f_2, f_3) への基底変換の行列を求めよ。

(2) $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ は (e_1, e_2, e_3) に関して $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表現されるとする。このとき T を (f_1, f_2, f_3) に関して表現する行列を求めよ。

解答. (1) 求める行列を P とすれば、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) T を (f_1, f_2, f_3) に関して表現する行列は、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -36 & 45 \\ 2 & -21 & 21 \\ 4 & -30 & 27 \end{pmatrix}$$

□

4.2 固有値と固有ベクトル

$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする。

定義 4.2.1. (1) U を K-vector space, $f \in L(U)$ とする。$\lambda \in K, u \in U$ $(u \neq 0)$ に対して、

$$f(u) = \lambda u$$

が成り立つとき、λ を f の固有値 (eigenvalue)、u を f の固有値 λ に属する固有ベクトル (eigenvector) という。
(2)˙ $A \in M_{nn}(K)$ とする。$\lambda \in K, x \in K^n$ $(x \neq 0)$ に対して、

$$Ax = \lambda x$$

が成り立つとき、λ を A の固有値、x を A の固有値 λ に属する固有ベクトルという。

K-vector space U, $f \in L(U)$, $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底、$A \in M_{nn}(K)$ を f を $(e_1, \cdots, e_n)$ に関して表現する行列とする。さらに $u \in U$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を $x \in K^n$ とするとき、$\lambda \in K$ に対して、

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

例 4.2.2. (1) A を $n \times n$ の対角行列とする。すなわち、$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ に対して、

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とおく。このとき A の固有値は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. $e_1, \cdots, e_n \in K^n$ を、$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば、固有値 λ_i に属する固有ベクトルは e_i の定数倍である。

(2) $U = C^\infty(\mathbb{R}) = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ は $\mathbb{R}$ 上無限階微分可能 $\}$ とする。このとき $\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ を $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対して $\frac{d}{dx}u = \frac{du}{dx}$ と定義する。このとき $\frac{d}{dx}$ は 1 次変換になる。ここで、$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $\frac{d}{dx}$ の固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ に属する固有ベクトルとすれば、

$$\frac{df}{dx} = \lambda f \Leftrightarrow \text{ある } C \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(x) = Ce^{\lambda x}$$

従って $\frac{d}{dx}$ は任意の実数を固有値に持つ。

定理 4.2.3. $A \in M_{nn}(K)$ とする。$\lambda \in K$ に対して、$F_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$ と定義するとき、

$$\lambda \in K \text{ が } A \text{ の固有値} \Leftrightarrow F_A(\lambda) = 0$$

$A \in M_{nn}(K)$ に対して $F_A(\lambda)$ は λ の n 次の多項式になる。$F_A(\lambda)$ を A の固有多項式（または特性多項式、characteristic polynomial）と呼ぶ。いま $B = P^{-1}AP$

証明. ある $x \in K^n, x \neq 0$ があって $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0$ □

命題 4.2.4. *U を有限次元 K-vector space, $f \in L(U)$ とする。$(e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n)$ を U の基底、A, B をそれぞれ f を $(e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n)$ に関して表現する行列とするとき $F_A(\lambda) = F_B(\lambda)$.*

この命題より f を表現する行列の固有多項式は基底の選び方によらないことがわかる。f を表現する行列 A に対して $F_A(\lambda)$ を $F_f(\lambda)$ と書いて f の固有多項式と呼ぶ。

証明. 定理 4.1.4 より A と B は相似である。すなわちある正則な $P \in M_{nn}(K)$ があって $B = P^{-1}AP$. ここで、$|B - \lambda I_n| = |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| = |A - \lambda I_n|$ □

例題 4.2.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{33}(\mathbb{R})$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。

解答. A の固有多項式は、

$$F_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)$$

従って固有値は $1, 4, -2$.

固有値 1 に属する固有ベクトル：固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば、

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより $y = z = 0$ である。従って、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ただし $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$)

固有値 4 に属する固有ベクトル：固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば、

$$(A - 4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより $y = -3x = -z$. 従って $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (ただし $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$)

固有値 -2 に属する固有ベクトル：$1, 4$ の場合と同様に計算すれば、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$t\begin{pmatrix} -5/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ （ただし $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$） $\square$

注意. 同じ行列でも $K = \mathbb{R}$ か $K = \mathbb{C}$ かで固有値が異なることがある。例えば、$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、$F_J(\lambda) = \lambda^2 + 1$ となる。従って $J \in M_{22}(\mathbb{R})$ と考えるときは $F_J(\lambda) = 0$ は $\mathbb{R}$ に解を持たないので、J は固有値を持たない。しかしながら $J \in M_{22}(\mathbb{C})$ と考えるときは、$F_J(\lambda) = 0$ は解 $\lambda = \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ を持ちこれらは J の固有値である。

定義 4.2.6. U を有限次元 K-vector space, $f \in L(U)$ とする。f が対角化可能 (semisimple) であるとは、ある U の基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ と $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ に対して、任意の $i = 1, \cdots, n$ で、$f(e_i) = \lambda_i e_i$ が成立することである。

命題 4.2.7. *U を有限次元 K-vector space, $f \in L(U)$ とする。このとき、次の 4 つの条件は同値である。*
(1) f は対角化可能
(2) U のある基底に関して f を表現する行列が対角行列になる。
(3) U のある基底に関する f の表現行列が対角行列と相似になる。
(4) U の任意の基底に関する f の表現行列が対角行列と相似になる。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) は定義より明らかである。
(2) $\Rightarrow$ (4): $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底であり、$(e_1, \cdots, e_n)$ に関して f を表現する行列が対角行列 A になるものとする。ここで U の基底 $(a_1, \cdots, a_n)$ に関して f を表現する行列を B、$(e_1, \cdots, e_n)$ から $(a_1, \cdots, a_n)$ への基底変換の行列を P とする。このとき、定理 4.1.4 より $B = P^{-1}AP$ となり B は対角行列に相似である。
(4) $\Rightarrow$ (3) は明らか。
(3) $\Rightarrow$ (2): 定理 4.1.6 より明らか。 $\square$

補題 4.2.8. *U を K-vector space, $f \in L(U)$ とする。$\lambda \in K$ に対して、f の λ に関する固有空間 $E_\lambda(f)$ を*

$$E_\lambda(f) = \{u | u \in U, f(u) = \lambda u\}$$

と定義する。このとき $E_\lambda(f)$ は U の subspace であり、λ が U の固有値 $\Leftrightarrow E_\lambda(f) \neq \{0\}$.

混乱を生じないときは $E_\lambda(f)$ を E_λ と書くこともある。

定理 4.2.9. U を有限次元 K-*vector space,* $f \in L(U)$ とする。f のすべての固有値の集合を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ とする。($i \neq j$ ならば $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする。) このとき、

$$f \text{ が対角化可能} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \dim E_{\lambda_i}(f) = \dim U$$

この定理を示すために次の補題を用意する。

補題 4.2.10. U を有限次元 K-*vector space,* $f \in L(U)$ とする。f のすべての固有値の集合を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ とする。($i \neq j$ ならば $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする。) このとき $i = 1, \cdots, k$ で $u_i \in E_{\lambda_i}(f)$ かつ $u_1 + \cdots + u_k = 0$ ならば任意の $i = 1, \cdots, k$ に対して $u_i = 0$.

証明. k に関する帰納法を用いる。$k = 1$ の時は明らか。$k-1$ で成り立つとする。このとき、$i = 1, \cdots, k$ で $u_i \in E_{\lambda_i}$, $u_1 + \cdots + u_k = 0$ とする。いま、

$$f(u_1 + \cdots + u_k) = f(u_1) + \cdots + f(u_k) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0$$

これより

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_k u_k &= 0 \\ \lambda_k u_1 + \ldots + \quad \lambda_k u_{k-1} + \lambda_k u_k &= 0 \end{aligned}$$

なので、

$$(\lambda_1 - \lambda_k) u_1 + (\lambda_2 - \lambda_k) u_2 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) u_{k-1} = 0$$

帰納法の仮定より $i = 1, \cdots, k-1$ では $(\lambda_i - \lambda_k) u_i = 0$. いま $i = 1, \cdots, k-1$ では $\lambda_i \neq \lambda_k$ より $u_i = 0$. これより $u_1 + \cdots + u_k = u_k = 0$. □

定理 *4.2.9* の証明. $\Rightarrow$: 固有ベクトルからなる基底が存在することより明らか。
$\Leftarrow$: $i = 1, \cdots, m$ に対して $(e_{i,1}, \cdots, e_{i,n_i})$ を E_{λ_i} の基底とする。このとき、$\dim E_{\lambda_i} = n_i$ であり、$n_1 + \cdots + n_m = \dim U$ となる。次に

$$\mathbf{e} = (e_{1,1}, \cdots, e_{1,n_1}, e_{2,1}, \cdots, e_{2,n_2}, \cdots, e_{m,1}, \cdots, e_{m,n_m})$$

が 1 次独立であることを示す。いま、$a_{i,j} \in K$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j} e_{i,j} = 0$$

とする。$u_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}e_{i,j}$ とおくと、$\sum_{i=1}^{m} u_i = 0$. 補題 4.2.10 で $k = m$ の場合より $i = 1, \cdots, m$ に対して $u_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}e_{i,j} = 0$. ここで $(e_{i,1}, \cdots, e_{i,n_i})$ は 1 次独立だから $j = 1, \cdots, n_i$ で $a_{i,j} = 0$. 従って $\mathbf{e}$ は 1 次独立になる。いま、$n_1 + \cdots + n_m = \dim U$ であるので補題 1.3.11 より $\mathbf{e}$ は U の基底である。固有ベクトルからなる基底が存在するので f は対角化可能である。 $\square$

系 4.2.11. U を有限次元 K*-vector space,* $f \in L(U)$ とする。いま f が $\dim U$ 個の相異なる固有値を持つならば f は対角化可能である。

上の系における「f が $\dim U$ 個の相異なる固有値を持つ」という条件は「f の固有多項式が相異なる $\dim U$ 個の解を K に持つ」と同値である。

例題 4.2.12. 次の行列は対角化可能かどうか調べよ。($K = \mathbb{R}$ とする。)

$$(1)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

解答. (1) 固有多項式は、$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 8 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)$. よって固有値は $1, 3$.

E_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$ とすれば $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ これより $y = 2x$ かつ $x = z$. 従って $E_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$ となり $\dim E_1 = 1$.

E_3: E_1 と同様の計算により $E_3 = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$. よって $\dim E_3 = 1$.

以上より、$dimE_1 + \dim E_3 = 2 < 3$ でありこの行列は対角化可能でない。

(2) 固有多項式は、$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. よって固有値は $1, 2$.

E_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$ とすれば、$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. これより $x =$

$2y+z$. 従って $E_1 = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | y, z \in \mathbb{R} \right\}$ となり $\dim U = 2$.

E_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$ とすれば、$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. これより $2y+z = 0$ かつ $x = 3y+z$. 従って $E_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$ となり $\dim E_2 = 1$.

以上より $\dim E_1 + \dim E_2 = 3$ であるからこの行列は対角化可能である。 □

演習 4.1. 次の行列の固有値および各固有値に属する固有ベクトルをすべて求めよ。さらに対角化可能かどうか調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

演習 4.2. $A \in M_{nn}(K)$ はある $m \in \mathbb{N}$ に対して、$A^m = 0$ のときべき零行列であるという。べき零行列の固有値は 0 だけであることを示せ。

演習 4.3. $A \in M_{nn}(K)$ とする。このとき $F_A(\lambda) = F_{{}^tA}(\lambda)$ であることを示せ。さらに A が対角化可能ならば ${}^tA$ も対角化可能であることを示せ。

演習 4.4. $A \in M_{nn}(K)$ は対角化可能であるとする。このとき $F_A(A) = 0$ であることを示せ。

演習 4.5. U を有限次元 K-vector space, $f, g \in L(U)$ とする。このとき $f \circ g$ と $g \circ f$ の固有多項式は一致することを示せ。

Chapter 5

計量ベクトル空間

5.1 内積

U を vector space とするとき $u \in U$ の長さや、$u, v \in U$ に対して u, v のなす角といった概念は内積を通して導入される。

定義 5.1.1. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. U を K-vector space とする。任意の $u, v \in U$ に対して $(u, v) \in K$ を対応させる $U \times U \to K$ の写像 $(\cdot, \cdot)$ が U の内積 (innder product) であるとは次の (IP1), (IP2), (IP3) がみたされることである。
(IP1): 任意の $u, v \in U$ に対して $(v, u) = \overline{(u, v)}$. ただし複素数 z に対して $\overline{z}$ は共役複素数を表す。$K = \mathbb{R}$ のときは $(u, v) = (v, u)$.
(IP2): 任意の $\alpha, \beta \in K$ および任意の $u, v, w \in U$ に対して $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$.
(IP3): 任意の $u \in U$ に対して (u, u) は非負の実数であり、$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

$(\cdot, \cdot)$ が U の内積であるとき、$(U, (\cdot, \cdot))$ を計量ベクトル空間と呼ぶ。

注意. (IP1) および (IP2) より、$\alpha, \beta \in K, u, v, w \in U$ に対して、

$$(w, \alpha u + \beta v) = \overline{\alpha}(w, u) + \overline{\beta}(w, v).$$

$K = \mathbb{R}$ のときは $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ より $\overline{\alpha} = \alpha, \overline{\beta} = \beta$.

例 5.1.2. (1) $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v \in \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$ とすれば $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{C}^n$ の内積である。この内積を $\mathbb{C}^n$ の標準的な内積という。

(2) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ とすれば $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ の内積である。この内積を $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積という。
(3) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して、

$$\begin{aligned}(x, y) &= 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 \\ &= (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= {}^t x \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y\end{aligned}$$

とすれば、$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^2$ の内積。
(4) $U = C([0, 1], \mathbb{C}) = \{f | f : [0, 1] \to \mathbb{C}, f$ は $[0, 1]$ 上連続 $\}$ とする。U は $\mathbb{C}$-vector space である。ここで、$f, g \in U$ に対して、

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

とすれば $(\cdot, \cdot)$ は U の内積である。

内積があればベクトルの長さおよび「ベクトルが直交する」という概念を定義することができる。

定義 5.1.3. U を K-vector space, $(\cdot, \cdot)$ を U の内積とする。
(1) $u \in U$ に対して u の $(\cdot, \cdot)$ に関する長さ $|u|$ を $|u| = \sqrt{(u, u)}$ と定義する。
(2) $u, v \in U$ に対して $(u, v) = 0$ が成り立つとき u と v は（$(\cdot, \cdot)$ に関して）直交するという。

定義 5.1.4. U を K-vector space とし、$(\cdot, \cdot)$ を U の内積とする。
(1) $e_1, \cdots, e_n \in U$ とする。$(e_1, \cdots, e_n)$ が $(U, (\cdot, \cdot))$ の正規直交系 (orthonormal system) であるとは、$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ が任意の $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ に対して成り立つことである。
(2) $e_1, \cdots, e_n \in U$ とする。$(e_1, \cdots, e_n)$ が $(U, (\cdot, \cdot))$ の正規直交基底 (orthonormal base) であるとは、$(e_1, \cdots, e_n)$ が正規直交系でありかつ U の基底であること。

定義 5.1.3 の用語を用いれば、正規直交系とは互いに直交し長さが 1 であるベクトルの組のことである。

どの内積を指すかが明らかなときは、「$(e_1, \cdots, e_n)$ が $(U, (\cdot,\cdot))$ の正規直交系（あるいは正規直交基底）」の代わりに、「$(e_1, \cdots, e_n)$ が U の正規直交系（あるいは正規直交基底）」ということもある。

例 5.1.5. (1) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ で例 5.1.2-(1), (2) の内積を考える。このとき、$i = 1, \cdots, n$ に対して $e_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$, $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$ とおくと、$(e_1, \cdots, e_n)$ は正規直交基底である。

(2) $\mathbb{R}^2$ に例 5.1.2-(3) の内積を考える。このとき $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ は正規直交基底になる。

(3) 例 5.1.2-(4) において、任意の N に対して $(\sqrt{2} \sin n\pi x)_{n=1,2,\cdots,N}$ とするとこれは正規直交系。

定理 5.1.6. *U を有限次元 K-vector space, $(\cdot,\cdot)$ を U の内積とする。このとき U は正規直交基底を持つ。*

注意. 正規直交系は 1 次独立である。実際、$(e_1, \cdots, e_k)$ を正規直交系としたとき、$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = 0$ ならば、e_i との内積を考えることで $\alpha_i = 0$ が得られる。

証明. $(a_1, \ldots, a_n)$ を U の基底とする。「任意の $k = 1, \ldots, n$ に対して、ある正規直交系 $(e_1, \ldots, e_k)$ があって、$\langle e_1, \ldots, e_k \rangle = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$」を帰納法で示す。

$k = 1$ のとき $b_1 = a_1$, $e_1 = b_1/|b_1|$ とする。（ただし $|u| = \sqrt{(u, u)}$. ）このとき $\langle a_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$ である。従って $k = 1$ では成立する。

k （ただし $k < n$） まで成り立つと仮定する。このとき、

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i$$

とおく。$b_{k+1} = 0$ ならば $a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} (a_{k+1}, e_i) e_i$. いま $e_1, \cdots, e_k \in \langle a_1, \cdots, a_k \rangle$ であるので $a_{k+1} \in \langle a_1, \cdots, a_k \rangle$ となる。これは $(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1})$ が 1 次独立であることに矛盾するので $b_{k+1} \neq 0$. ここで $e_{k+1} = b_{k+1}/|b_{k+1}|$ とおく。$|e_{k+1}| = 1$ は明らかである。いま $i = 1, \cdots, k$ に対して

$$(e_{k+1}, e_i) = |b_{k+1}|^{-1} ((a_{k+1}, e_i) - \sum_{j=1}^{n} (a_{k+1}, e_j)(e_j, e_i)) = 0.$$

これより $(e_1,\cdots,e_k,e_{k+1})$ は正規直交系である。いま $a_{k+1}\in\langle e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}\rangle$ であるので、$\langle a_1,\cdots,a_k,a_{k+1}\rangle\subseteq\langle e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}\rangle$. 両辺の次元が等しいので等号が成立する。 $\square$

上の定理の証明では $(a_1,\cdots,a_n)$ から $(e_1,\cdots,e_n)$ を作るアルゴリズムを与えている。

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_1 & , e_1 &= \frac{b_1}{|b_1|} \\
b_{k+1} &= a_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}(a_{k+1}e_i)e_i & , e_{k+1} &= \frac{b_{k+1}}{|b_{k+1}|}.
\end{aligned}
$$

一般の基底から正規直交基底をつくるこのアルゴリズムを Schmidt の直交化法という。

例題 5.1.7. (1) $\mathbb{C}^2$ において $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ に対して、

$$(u,v)=(u_1\ u_2)\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{v_1}\\ \overline{v_2}\end{pmatrix}$$

とおくと $(\cdot,\cdot)$ は内積となることを示せ。
(2) $a_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に Schmidt の直交化法を用いて $\mathbb{C}^2$ の内積 $(\cdot,\cdot)$ に関する正規直交基底をつくれ。

解答. (1) (IP1), (IP2) は定義より明らか。いま $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ かつ $u_1=x_1+iy_1, u_2=x_2+iy_2$ （ただし $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}$） とおくとき、

$$
\begin{aligned}
(u,u) &= u_1\overline{u_1}+iu_1\overline{u_2}-iu_2\overline{u_1}+2u_2\overline{u_2} \\
&= (x_1+y_2)^2+(x_2-y_1)^2+{x_2}^2+{y_2}^2
\end{aligned}
$$

これより (IP3) も明らかである。
(2) $|a_1|=1$ より $e_1=a_1$. 従って $b_2=a_2-(a_1,e_1)e_1=a_2-(-i)e_1=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$.
$|b_2|=1$ より $e_2=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$. 従って、得られた正規直交基底は $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\right)$. $\square$

正規直交基底に関する座標を用いれば、内積は $\mathbb{R}^n$（または $\mathbb{C}^n$）における標準的な内積で与えられる。

命題 5.1.8. U を K-*vector space,* $(\cdot,\cdot)$ を U の内積とする。いま、$(e_1,\cdots,e_n)$ を $(U,(\cdot,\cdot))$ の正規直交基底とする。このとき $u,v\in U$ に対してその $(e_1,\cdots,e_n)$ に関する座標をそれぞれ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とすれば $(u,v)=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}={}^t x\overline{y}$.

証明.

$$\begin{aligned}(u,v)&=(x_1e_1+\cdots+x_ne_n, y_1e_1+\cdots+y_ne_n)\\ &=\sum_{i,j=1,\cdots,n}(x_ie_i,y_je_j)=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}\end{aligned}$$

□

演習 5.1. a,b,c,d を実数とする。$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ に対して、

$$(x,y)=(x_1\ \ x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

と定義する。$(\cdot,\cdot)$ が $\mathbb{R}^2$ の内積になるための必要十分条件は $b=c, a>0$ かつ $b^2-ad<0$ であることを示せ。

演習 5.2. $f,g\in \mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ に対して、$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ と定義する。
(1) $(\cdot,\cdot)$ は $\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ の内積であることを示せ。
(2) $\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ の基底 $(1,x,x^2)$ から Schmidt の直交化法を用いて $\mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ の正規直交基底をつくれ。

演習 5.3. $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}^3$ を $a_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき Schmidt の直交化法を用いて (a_1,a_2,a_3) から $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積に関する正規直交基底をつくれ。

演習 5.4. U を有限次元 K-vector space, $(\cdot,\cdot)$ を U の内積とする。$e_1,\cdots,e_m\in U$ が互いに直交するとき、$(e_1,\cdots,e_m)$ が正規直交基底であるための必要十分条件は「任意の $u\in U$ に対して $\sum_{i=1}^n|(e_i,u)|^2=|u|^2$」であることを示せ。

5.2 ユニタリー変換、ユニタリー行列

U を K-vector space, $(\cdot,\cdot)$ を U 上の内積とする。この節では U から U への１次変換 f で内積を不変に保つものを考察する。いま $f \in L(U)$ が U の内積 $(\cdot,\cdot)$ を不変に保つとは、任意の $u, v \in U$ に対して、$(f(u), f(v)) = (u, v)$ が成り立つことである。このとき f はベクトルの長さや２つのベクトルのなす角を変えない。

定理 5.2.1. *U を K-vector space, $(\cdot,\cdot)$ を U の内積とする。このとき $f \in L(U)$ に対して、次の (1), (2) は同値である。さらに U が有限次元であり、$\dim U = n$ であるとき、(1) は (3), (4), (5) とも同値である。*
(1) f は U の内積 $(\cdot,\cdot)$ を不変に保つ。
(2) f は U のベクトルの長さを不変に保つ。すなわち任意の $u \in U$ に対して $|u| = |f(u)|$.
(3) $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の正規直交基底とするとき、$(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ は正規直交基底である。
(4) $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の正規直交基底、P を $(e_1, \cdots, e_n)$ に対して f を表現する行列とするとき、${}^t\overline{P}P = I_n$.
(5) $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の正規直交基底、P を $(e_1, \cdots, e_n)$ に対して f を表現する行列とする。$p_j \in K^n$ を P の j 列目の列ベクトルとするとき、$(p_1, \cdots, p_n)$ は K^n の標準的な内積、$(x, y) = {}^t x\overline{y}$ に関する正規直交基底である。

記号. K^n の標準的な内積を $(\cdot,\cdot)_{K^n}$ で表す。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか。
(2) $\Rightarrow$ (1): $(u+v, u+v) = (f(u+v), f(u+v))$ より、$(u,u)+(v,v)+(u,v)+(v,u) = (f(u),f(u))+(f(v),f(v))+(f(u),f(v))+(f(v),f(u))$. いま $|u| = |f(u)|, |v| = |f(v)|$ より、

$$(u,v)+(v,u) = (f(u),f(v))+(f(v),f(u)). \tag{5.1}$$

$K = \mathbb{R}$ なら、$(u,v) = (f(u),f(v))$. $K = \mathbb{C}$ のとき、(5.1) において v を iv に置き換えれば、$-i(u,v)+i(v,u) = -i(f(u),f(v))+i(f(v),f(u))$. よって $(u,v)-(v,u) = (f(u),f(v))-(f(u),f(v))$. (5.1) と組み合わせれば $(u,v) = (f(u),f(v))$.
(1) $\Rightarrow$ (3): $(f(e_i), f(e_j)) = (e_i, e_j)$ より明らか。
(3) $\Rightarrow$ (5): 命題 2.1.4 より $f(e_j)$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標が p_j である。命題 5.1.8 より、$(f(e_i), f(e_j)) = (p_i, p_j)_{K^n}$ であるので、$(p_1, \cdots, p_n)$ は K^n

の標準的な内積に関して正規直交基底となる。

(5) $\Rightarrow$ (4): ${}^tP = \begin{pmatrix} {}^tp_1 \\ \vdots \\ {}^tp_n \end{pmatrix}, \overline{P} = (\overline{p_1} \cdots \overline{p_n})$ より、${}^tP\overline{P}$ の (i,j) 成分は、${}^tp_i\overline{p_j} = (p_i, p_j)_{K^n}$. いま $(p_1, \cdots, p_n)$ は K^n の正規直交基底であるので、${}^tP\overline{P} = I_n$.
ここで $\overline{{}^tP\overline{P}} = {}^t\overline{P}P = \overline{I_n} = I_n$.

(4) $\Rightarrow$ (1): u, v の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標をそれぞれ $x, y \in K^n$ とするとき、

$$(f(u), f(v)) = (Px, Py)_{K^n} = {}^tx{}^tP\overline{P}\overline{y} = {}^tx\overline{y} = (x, y)_{K^n} = (u, v).$$

$\square$

定義 5.2.2. (1) U を K-vector space, $(\cdot, \cdot)$ を U の内積, $f \in L(U)$ とする。

$K = \mathbb{C}$ の場合、f が内積 $(\cdot, \cdot))$ を不変に保つとき、f を $(U, (\cdot, \cdot))$ 上のユニタリー変換（unitary transformation）という。

$K = \mathbb{R}$ の場合、f が内積 $(\cdot, \cdot)$ を不変に保つとき、f を $(U, (\cdot, \cdot))$ 上の直交変換（orthogonal transformation）という。

(2) $P \in M_{nn}(\mathbb{C})$ が ${}^t\overline{P}P = I_n$ をみたすとき、P を n 次元のユニタリー行列（unitary matrix）という。$P \in M_{nn}(\mathbb{R})$ が ${}^tPP = I_n$ をみたすとき、P を n 次元の直交行列（orthogonal matrix）という。

定理 5.2.1 より「ユニタリー変換（直交変換）を正規直交基底に関して表現する行列 = ユニタリー行列（直交行列）」である。

命題 5.2.3. $A \in M_{nn}(K)$, A の i 行目の行ベクトルを $\hat{a}_i$ とする。すなわち $A = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix}$ である。このとき、次の 3 つの条件は同値である。

(1) A がユニタリー行列（直交行列）である。
(2) ${}^tA$ がユニタリー行列（直交行列）である。
(3) $({}^t\hat{a}_1, \cdots, {}^t\hat{a}_n)$ が K^n の標準的な内積に関して正規直交基底である。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2): A がユニタリー行列 $\Leftrightarrow$ ${}^t\overline{A}A = I_n$. $\Leftrightarrow$ $A{}^t\overline{A} = I_n$. $\Leftrightarrow$ $\overline{A}{}^tA = I_n$. $\Leftrightarrow$ ${}^tA$ がユニタリー行列
(2) $\Leftrightarrow$ (3): ユニタリー行列の定義より明らか。 $\square$

定理 5.2.1 とこの命題よりユニタリ行列（直交行列）の列ベクトルおよび行ベクトルは標準的な内積に関して正規直交基底をなすことがわかる。

例題 5.2.4. 次の行列が直交行列となるような a, b, c, d, e, f の値をすべて求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & d & \frac{1}{2} \\ e & f & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

解答. 1 行目の行ベクトルおよび 1 列目の列ベクトルの長さは 1 であるので、$a = b = c = e = 0$. $2, 3$ 列目の列ベクトルをそれぞれ a_2, a_3 で表せば、$|a_2| = 1$ より $d^2 + f^2 = 1$. これよりある $\theta \in \mathbb{R}$ に対して、$d = \cos\theta, e = \sin\theta$ とできる。いま $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\pi/3 \\ \sin\pi/3 \end{pmatrix}$ であり、$(a_2, a_3)_{\mathbb{R}^3} = 0$ より、$\theta = \pi/3 + \pi/2, \pi/3 - \pi/2 = 5\pi/6, -\pi/6$. 従って $\begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. □

例題 5.2.5. 次の行列がユニタリー行列となるような、b_1, b_2, b_3 の値をすべて求めよ。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & b_1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{6}} & b_2 \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & b_3 \end{pmatrix}$$

解答. 与えられた行列 を $(a_1\, a_2\, a_3) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix}$ とおく。このとき、$|{}^t\hat{a}_3| = 1$ より $b_3 = 0$. これと、$(a_1, a_3) = (a_2, a_3) = 0$ を用いれば $b_1 + b_2 = 0$. また $|b_1|^2 + |b_2|^2 = 1$. 従って $|b_1| = |b_2| = 1/\sqrt{2}, b_2 = -b_1$. いま b_1 の偏角を $\theta \in [0, 2\pi)$ とすれば、$b_1 = (\cos\theta + i\sin\theta)/\sqrt{2}, b_2 = -(\cos\theta + i\sin\theta)/\sqrt{2}$. 逆にこのとき与えられた行列はユニタリー行列になる。 □

命題 5.2.6. *U を有限次元 K-vector space, $(\cdot, \cdot)$ を U の内積とする。また $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の正規直交基底とする。このとき U の基底 $(f_1, \cdots, f_n)$ が正規直交基底 $\Leftrightarrow$ $(e_1, \cdots, e_n)$ から $(f_1, \cdots, f_n)$ への基底変換の行列がユニタリー（直交）行列*

証明. $(e_1, \cdots, e_n)$ から $(f_1, \cdots, f_n)$ への基底変換の行列を P、P の j 列目の列ベクトルを $p_j \in K^n$ とする。このとき p_j は f_j の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標である。よって、$(f_1, \cdots, f_n)$ が U の正規直交基底 $\Leftrightarrow$ $(p_1, \cdots, p_n)$ が K^n の標準的な内積に関する正規直交基底 $\Leftrightarrow$ P がユニタリー（直交）行列 □

命題 5.2.7. U を有限次元 K*-vector space,* $(\cdot,\cdot)$ を U の内積、$(e_1,\cdots,e_n)$ を $(U,(\cdot,\cdot))$ の正規直交基底とする。いま $f\in L(U)$, A を f を $(e_1,\cdots,e_n)$ について表現する行列とする。さらに $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in K$ とする。このとき次の２つは同値である。
(1) ある正規直交基底 $(g_1,\cdots,g_n)$ があって、任意の $i=1,\cdots,n$ に対して $f(g_i)=\lambda_i g_i$.
(2) あるユニタリー（直交）行列 P があって

$$
{}^t\overline{P}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{5.2}
$$

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): 定理 4.1.4 より $(e_1,\cdots,e_n)$ から $(g_1,\cdots,g_n)$ への基底変換の行列を P をするとき $(g_1,\cdots,g_n)$ について f を表現する行列は $P^{-1}AP$. このとき $P^{-1}AP$ は (5.2) の右辺に等しい。さらに命題 5.2.6 より P はユニタリー（直交）行列であるので $P^{-1}={}^t\overline{P}$. 従って (5.2) が成立する。
(2) $\Rightarrow$ (1): 定理 4.1.2 より U の基底 $(g_1,\cdots,g_n)$ で $(e_1,\cdots,e_n)$ から $(g_1,\cdots,g_n)$ への基底変換の行列が P になるものが存在する。P はユニタリー（直交）行列であるから命題 5.2.6 より $(g_1,\cdots,g_n)$ は正規直交基底になる。このとき ${}^t\overline{P}AP=P^{-1}AP$ は $(g_1,\cdots,g_n)$ に関して f を表現する行列である。(5.2) より、任意の $i=1,\cdots,n$ に対して $f(g_i)=\lambda_i g_i$. □

演習 5.5. $A\in M_{22}(\mathbb{R})$ が直交行列であるための必要十分条件はある $\theta\in\mathbb{R}$ に対して $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ または $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ であることを示せ。

演習 5.6. 次の命題が正しければ証明し、間違っていれば反例をあげよ。
(1) A がユニタリー行列ならば $\overline{A}$ もユニタリー行列である。
(2) A がユニタリー行列ならば A^{-1} もユニタリー行列である。
(3) A,B がユニタリー行列ならば AB もユニタリー行列である。
(4) A,B がユニタリー行列ならば $A+B$ もユニタリー行列である。

演習 5.7. (1) P をユニタリー行列とするとき $\det P$ の絶対値は 1 であることを示せ。さらに P が直交行列ならば $\det P=\pm1$ であることを示せ。
(2) P をユニタリー行列とするとき P の固有値の絶対値は 1 であることを示せ。さらに P が直交行列ならば P の固有値は ±1 であることを示せ。

演習 5.8. 次の行列がユニタリー行列となるような a, b, c の値を求めよ。

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} a & 1 & -\sqrt{2}i \\ b & i & \sqrt{2} \\ 0 & c & \sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

演習 5.9. $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ を直交行列とする。いま $\det A = -\det B$ ならば $\det(A+B) = 0$ を示せ。

演習 5.10. $A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ とする。「$A+iB$ がユニタリー行列 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ が直交行列」を示せ。

5.3 エルミート変換、エルミート行列

定義 5.3.1. U を K-vector space, $(\cdot,\cdot)$ を U 上の内積、$f \in L(U)$ とする。任意の $u, v \in U$ に対して、

$$(f(u), v) = (v, f(u))$$

が成立するとき、
$K = \mathbb{C}$ の場合、f を $(U, (\cdot,\cdot))$ 上のエルミート変換 (Hermite transformation)、
$K = \mathbb{R}$ の場合、f を $(U, (\cdot,\cdot))$ 上の対称変換 (symmetric transformation) という。

定理 5.3.2. *U を有限次元 K-vector space, $(\cdot,\cdot)$ を U の内積、$f \in L(U)$, $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の正規直交基底とする。さらに A を $(e_1, \cdots, e_n)$ に関して f を表現する行列とする。このとき次の 4 つは同値である。*
(1) f はエルミート変換（対称変換）である。
(2) ${}^t\overline{A} = A$.
(3) あるユニタリー行列（直交行列） P と $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ があって、

$${}^t\overline{P}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(4) ある U の正規直交基底 $(g_1, \cdots, g_n)$ と $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ があって、任意の $i = 1, \cdots, n$ に対して $f(g_i) = \lambda_i g_i$ が成り立つ。

この定理の証明は２つの部分に分けて行う。

定理 5.3.2 の証明：第１部. ここでは、(1) $\Leftrightarrow$ (2) の証明を行う。$u, v \in U$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を $x, y \in K^n$ とするとき、$(f(u), v) = (Ax, y)_{K^n} = {}^t x {}^t A \overline{y}$. 同様に $(u, f(v)) = {}^t x \overline{A} \overline{y}$. 従って、(1) $\Leftrightarrow {}^t A = \overline{A} \Leftrightarrow {}^t\overline{A} = A$. □

定理の残りの部分の証明には次の補題を用いる。

補題 5.3.3. *U を有限次元の K-vector space, $(\cdot, \cdot)$ を U の内積、$f \in L(U)$ を $(U, (\cdot, \cdot))$ 上のエルミート変換（$K = \mathbb{R}$ なら直交変換）とする。このとき f は少なくとも一つ実数の固有値を持つ。*

この補題の証明には次の定理を用いる。

定理 5.3.4 (代数学の基本定理)**.** *$n \in \mathbb{N}$ とし $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ とする。z の多項式*

$$P(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

に対して、$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ で

$$P(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$$

となるものが存在する。

補題 5.3.3 の証明. U の正規直交基底を $(e_1, \ldots, e_n)$ として、f を $(e_1, \ldots, e_n)$ に関して表現する行列を A とする。$K = \mathbb{R}$ ならば A は実行列である。このとき上の証明で定理 5.3.3 の (1) $\Leftrightarrow$ (2) より ${}^t\overline{A} = A$ が成り立つ。いま $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ いずれの場合にも $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ の線型写像と考える。このとき、A の特性多項式 $F_A(z)$ に対して、定理 5.3.4 を用いれば、少なくとも一つ $\lambda \in \mathbb{C}$ があって $F_A(\lambda) = 0$. 従って λ は $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ となり、固有値 λ に属する固有ベクトル $u \in \mathbb{C}^n, u \neq 0$ がとれる。ここで、$(\cdot, \cdot)_n$ を $\mathbb{C}^n$ の標準的な内積とするとき、

$$\lambda(u, u)_n = (\lambda u, u)_n = (Au, u)_n = (u, Au)_n = (u, \lambda u)_n = \overline{\lambda}(u, u)_n$$

$(u, u) \neq 0$ より $\lambda = \overline{\lambda}$. すなわち $\lambda \in \mathbb{R}$. $K = \mathbb{C}$ の時はこれで証明は終了。$K = \mathbb{R}$ のとき、$\lambda \in \mathbb{R}$ なので、$F_A(\lambda) = 0$ より $A - \lambda I_n$ は正則でない。$A - \lambda I_n$ は実行列なので、ある $v \in \mathbb{R}, v \neq 0$ で $Av = \lambda v$ □

定理 *5.3.2* の証明：第２部. (3) $\Leftrightarrow$ (4): 命題 5.2.7 より明らか。
(3) $\Rightarrow$ (2): (3) の右辺の対角行列を D とおくとき、$A = PD{}^t\overline{P}$. 従って ${}^t\overline{A} = P\overline{D}{}^t\overline{P}$. いま $\lambda_i \in \mathbb{R}$ より $\overline{D} = D$. よって ${}^t\overline{A} = A$.
(1) $\Rightarrow$ (4): $n = \dim U$ に関する帰納法を用いる。$n = 1$ のとき、$U = \mathbb{C}$ と考えてよい。このとき $\lambda \in \mathbb{C}$ があって、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $f(z) = \lambda z$. いま任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して、$(f(z_1), z_2) = \lambda z_1\overline{z_2}$, $(z_2, f(z_2)) = \overline{\lambda} z_1\overline{z_2}$. (1) より $\lambda = \overline{\lambda}$ となり、$\lambda \in \mathbb{R}$.

n まで成立したと仮定する。$\dim U = n + 1$ とする。補題 5.3.3 より f の固有値 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ が存在する。g_1 を λ_1 に属する f の固有値で $|g_1| = 1$ となるものとする。定理 1.3.12 と Smidt の直交化法を組み合わせれば、ある $a_1, \cdots, a_n \in U$ があって、$(g_1, a_1, \cdots, a_n)$ が U の正規直交基底となるようにできる。ここで $V = \langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ とおくと、$V = \{v | v \in U, (e_1, v) = 0\}$. いま、$v \in V$ に対して、$(e_1, f(v)) = (f(e_1), v) = \lambda_1(e_1, v) = 0$. 従って $f(v) \in V$. これより $f|_V$ （f の定義域を V に制限した写像）は V から V への 1 次変換。さらに $f|_V \in L(V)$ は V 上のエルミート変換（対称変換）でありまた $\dim V = n$ である。帰納法の仮定より、V の正規直交基底 $(g_2, \cdots, g_{n+1})$ と $\lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ があって、$f(g_i) = \lambda_i g_i$ が $i = 2, \cdots, n+1$ で成立する。このとき $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ は U の正規直交基底であるから $n + 1$ でも (4) は成立する。 □

定義 5.3.5. $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ がエルミート行列であるとは ${}^t\overline{A} = A$ が成立することである。また $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ が対称行列であるとは ${}^tA = A$ が成立することである。

定理 5.3.2 より

エルミート行列（対称行列）
=エルミート変換（対称変換）を正規直交基底に関して表現する行列
=正規直交基底で対角化可能であり、固有値がすべて実数の行列

また、f がエルミート変換（対称変換）なら f の相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

A をエルミート行列（対称行列）とする。このとき A を対角化するユニタリー行列（直交行列）は次の (1), (2), (3) の手順で求められる。
(1) A の固有値、固有ベクトルを求める。
(2) A の固有ベクトルからなる（標準的な内積に関する）正規直交基底を求める。すなわち、$p_1, \cdots, p_n \in K^n$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ で $(p_1, \cdots, p_n)$ は K^n の正規直交基底であり、任意の $i = 1, \cdots, n$ に関して $f(p_i) = \lambda_i p_i$ となるようなものを求める。

(3) $P \in M_{nn}(K)$ を $P = (p_1 \cdots p_n)$ とおく。この P が求めるユニタリー（直交）行列である。実際、D を定理 5.3.2-(3) の右辺の対角行列とすれば、

$$AP = (Ap_1 \cdots Ap_n) = (\lambda_1 p_1 \cdots \lambda_n p_n) = PD$$

従って、$P^{-1}AP = {}^t\overline{P}AP = D.$

例題 5.3.6. 次の行列を対角化するユニタリー行列を（一つ）求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解答. 固有値は、

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & i \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -i & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

より $\lambda = 0, \pm\sqrt{2}.$

0 に属する固有ベクトルは $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sqrt{2}$ に属する固有ベクトルは $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix}$, $-\sqrt{2}$ に属する固有ベクトルは $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix}$. これらから正規直交基底を作れば、$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix}$, $p_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix}$. これより、

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}i}{2} & \frac{\sqrt{2}i}{2} \end{pmatrix}$$

が与えられたエルミート行列を対角化するユニタリー行列（の一つ）である。 □

演習 5.11. 次の命題のうち正しいものは証明し、間違っているものには反例をあげよ。
(1) A をエルミート（対称）行列とするとき、任意の $m \geq 1$ に対して A^m はエルミート（対称）行列である。

(2) A をエルミート（対称）行列とする。ある $m \geq 1$ で $A^m = 0$ ならば $A = 0$ である。
(2) A, B をエルミート（対称）行列とするとき AB もエルミート（対称）行列である。
(3) A, B をエルミート（対称）行列とするとき、$A + B$ もエルミート（対称）行列である。
(4) A, B をエルミート（対称）行列とするとき、$AB + BA$ もエルミート行列である。
(5) A, B をエルミート行列とするとき、$i(AB - BA)$ もエルミート行列である。

演習 5.12. 次の行列を対角化するユニタリー行列を求めよ。ただし a は実数である。

$$(1)\ \begin{pmatrix} a-1 & a & a \\ a & a-1 & a \\ a & a & a-1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2a & i & 0 \\ -i & 4a & -i \\ 0 & i & 2a \end{pmatrix}$$

演習 5.13. 対称行列 $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ の固有値は $3, 2, 0$ であり、

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす。このとき以下の問いに答えよ。
(1) A を対角化する直交行列を求めよ。
(2) A を求めよ。

演習 5.14. $A_1, \cdots, A_m \in M_{nn}(\mathbb{C})$ はエルミート行列とする。いま $\sum_{i=1}^m {A_i}^2 = 0$ ならば任意の $i = 1, \cdots, m$ に対して $A_i = 0$ であることを示せ。

演習 5.15. $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ をエルミート行列とする。
(1) $I_n + iA$ は正則であることを示せ。
(2) $P = (I_n - iA)(I_n + iA)^{-1}$ とするとき P はユニタリー行列であることを示せ。さらに $P + E$ が正則であることを示せ。

演習 5.16. (1) U を有限次元 $\mathbb{C}$-vector space, $f \in L(U)$ は対角化可能であり、すべての固有値が実数であるとする。いま $u \in U$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f^3(u) = \lambda u$ ($f^3 = f \circ f \circ f$) が成り立つならば、$f(u) = \lambda^{1/3} u$ であることを示せ。

(2) P, Q をエルミート行列とする。$P^3 = Q^3$ ならば $P = Q$ が成り立つことを示せ。
(3) A をエルミート行列とするとき、$A = P^3$ をみたすエルミート行列が唯一つ存在することを示せ。

5.4 2次形式

この節では、一般に $x_1, \cdots, x_n$ の n 個の変数をもつ2次形式

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

を考察する。ここで $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ を $A = (a_{ij})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とするとき、上の2次形式は ${}^t\!xAx$ で与えられる。一般に行列 $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$A[x] = {}^t\!xAx$$

とおく。この $A[x]$ を A で定義される2次形式 (quadratic form) と呼ぶ。このとき、$x_i x_j$ の係数は $a_{ij} + a_{ji}$ なので、$(a_{ij} + a_{ji})/2$ を改めて a_{ij} とおけば A は対称行列としてよい。これ以降は2次形式を定義する行列としては対称行列のみを考える。

2次形式に関する一番の問題は適当な変数変換で完全平方の形に変形できるかということである。すなわち、ある正則な行列 $P \in M_{nn}(\mathbb{R})$ があって、

$$A[Py] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {y_i}^2$$

(ただし $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$) とできるかということである。ここで $A[Py] = {}^t\!PAP$ であることに注意すればこの問題は ${}^t\!PAP$ が対角行列になるような P があるかということに帰着する。いま定理 5.3.2 より、対称行列 A は直交行列で対角化可能である。つまりある直交行列 P があって $P^{-1}AP = {}^t\!PAP$ が対角行列になる。このことより任意の2次形式は変数変換によって完全平方の形に変形できることが分かる。

定義 5.4.1. $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ を対称行列とする。ここで

$$p = \sum_{\substack{\lambda:\lambda>0 \\ \lambda \text{ は } A \text{ の固有値}}} \dim E_\lambda(A), \qquad q = \sum_{\substack{\lambda:\lambda<0 \\ \lambda \text{ は } A \text{ の固有値}}} \dim E_\lambda(A)$$

とし、(p,q) を A の符号数とよぶ。

P を対称行列 A を対角化する直交行列とし、

$$^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とするとき $p = \lambda_i > 0$ となる i の個数, $q = \lambda_i < 0$ となる i の個数 である。

定理 5.4.2. $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ を対称行列, $A[x]$ を A から定義される 2 次形式、(p,q) を A の符号数とする。このときある正則な行列 $Q \in M_{nn}(\mathbb{R})$ で

$$A[Qy] = {y_1}^2 + \cdots + {y_p}^2 - ({y_{p+1}}^2 + \cdots + {y_{p+q}}^2) \tag{5.3}$$

となるものが存在する。さらに正則な行列 R に対して、

$$A[Ry] = {y_1}^2 + \cdots + {y_r}^2 - ({y_{r+1}}^2 + \cdots + {y_{r+s}}^2) \tag{5.4}$$

が成り立つならば、$r = p, s = q$ である。

証明. P を A を対角化する直交行列で、

$$^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とする。このとき、$\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ は正、$\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_{p+q}$ は負、$\lambda_{p+q+1}, \cdots, \lambda_n$ は 0 として一般性を失わない。いま、対角行列 $S = (s_{ij}) \in M_{nn}(\mathbb{R})$ を、$i = 1, \cdots, p$ では $s_{ii} = 1/\sqrt{\lambda_i}$, $i = p+1, \cdots, p+q$ では $s_{ii} = 1/\sqrt{-\lambda_i}$, $i = p+q+1, \cdots, n$ では $s_{ii} = 1$ で定義する。このとき $PS = Q$ とすれば、

$$^tQAQ = {}^tS{}^tPAPS = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（ただし I_p, I_q はそれぞれ p, q 次の単位行列）となる。従って (5.3) が成立する。

次に (5.4) が成立するならば、

$$ {}^tRAR = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

いま $p+q = \operatorname{rank} {}^tQAQ = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^tRAR = r+s$ である。

$$ V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, i \geq p+1, \text{ で } y_i = 0 \right\}, $$

$$ V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, i < r+1 \text{ で } z_i = 0 \right\} $$

とおく。$x \in Q(V_1) \cap R(V_2)$ とすると、$y \in V_1, z \in V_2$ があって $x = Qy = Rz$. このとき (5.3), (5.4) より $A[x] = A[Qy] = {y_1}^2 + \cdots + {y_p}^2 \geq 0$ かつ $A[x] = A[Rz] = -({z_{r+1}}^2 + \cdots + {z_{r+s}}^2) \leq 0$. したがって $A[x] = 0$ となり、$y_1 = \cdots = y_p = 0$. よって $y = 0$ となりさらに $x = Ay = 0$. すなわち $Q(V_1) \cap R(V_2) = \{0\}$ であるので、

$$ n \geq \dim\left(Q(V_1) + R(V_2)\right) = \dim Q(V_1) + \dim R(V_2) = p + (n-r) $$

これより、$r \geq p$. Q と R を入れ換えて同じ議論を行なえば、$r \leq p$ より $r = p$. いま $p+q = r+s$ より $q = s$. □

定義 5.4.3. 対称行列 $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ の符号数を (p, q) とするとき、

$$ {y_1}^2 + \cdots + {y_p}^2 - ({y_{p+1}}^2 + \cdots + {y_{p+q}}^2) $$

を 2 次形式 $A[x]$ の標準形という。

例 5.4.4. 2 次形式 $(x_1 + x_2)^2 + x_3 x_4$ を定義する行列は、

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} $$

A の固有値は $\pm\frac{1}{2}, 0, 2$. A の符号数は $(2, 1)$. いま各固有値に属する固有ベクトルは、$\lambda = 2$ では $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ では $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ では $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\lambda = 0$ では $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$. これらのベクトルから正規直交基底を作ることで、A を対角化する直交行列 P をもとめれば、

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

このとき $A[Py] = 2{y_1}^2 + \frac{1}{2}{y_2}^2 - \frac{1}{2}{y_3}^2$. ここで、

$$Q = P\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0\\0 & \sqrt{2} & 0 & 0\\0 & 0 & \sqrt{2} & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

とおけば、$A[Qz] = {z_1}^2 + {z_2}^2 - {z_3}^2$. これが $A[x]$ の標準形である。

定義 5.4.5. 対称行列 A から定義される 2 次形式 $A[x]$ が、
正値 (positive definite) であるとは任意の $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ に対して $A[x] > 0$ が成り立つことである。
半正値 (positive semi-definite)（あるいは非負値 (non-negative definite)）であるとは、任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $A[x] \geq 0$ が成り立つことである。
負値 (negative definite) であるとは任意の $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ に対して $A[x] < 0$ が成り立つことである。
半負値 (negative semi-definite)（あるいは非正値 (non-positive definite)）であるとは任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $A[x] \leq 0$ が成り立つことである。

これまでの議論から次の命題が成立することは明らかである。

命題 5.4.6. $A \in M_{nn}(K)$ を対称行列とする。
(1) $A[x]$ が正値（負値）$\Leftrightarrow$ A の固有値がすべて正（負）$\Leftrightarrow$ A の符号数が

$(n,0)$ （$(0,n)$）
(2) $A[x]$ が半正値（半負値） $\Leftrightarrow$ A が負（正）の固有値を持たない。$\Leftrightarrow$ ある $0 \leq m \leq n$ に対して、A の符号数が $(m,0)$ （$(0,m)$）

定義 5.4.7. エルミート行列 $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ と $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して、

$$A[z] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{z_i}z_j = {}^t\overline{z}Az$$

とする。$A[z]$ をエルミート行列 A から定義されるエルミート形式と呼ぶ。

エルミート行列 A から定義されるエルミート形式 $A[z]$ において、

$$\overline{A[z]} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{ij}}z_i\overline{z_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\overline{z_j}z_i = A[z]$$

が成り立つ。すなわち任意の $z \in \mathbb{C}^n$ に対して $A[z] \in \mathbb{R}$ である。

エルミート行列はユニタリー行列で対角化されることより次の命題は明らかである。

命題 5.4.8. エルミート行列 $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ で定義されるエルミート形式 $A[z]$ に対してあるユニタリー行列 $P \in M_{nn}(\mathbb{C})$ と $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ があって、任意の $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$A[Pw] = \lambda_1 w_1\overline{w_1} + \cdots + \lambda_n w_n\overline{w_n}$$

となる。

エルミート行列に対しても対称行列と同様にその符号数 (p,q) を定義することができる。

定理 5.4.9. $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ をエルミート行列, $A[z]$ を A から定義されるエルミート形式、(p,q) を A の符号数とする。このとき正則な行列 $Q \in M_{nn}(\mathbb{R})$ で

$$A[Qw] = w_1\overline{w_1} + \cdots + w_p\overline{w_p} - (w_{p+1}\overline{w_{p+1}} + \cdots + w_{p+q}\overline{w_{p+q}})$$

となるものが存在する。さらに正則な行列 R に対して、

$$A[Rw] = w_1\overline{w_1} + \cdots + w_r\overline{w_r} - (w_{r+1}\overline{w_{r+1}} + \cdots + w_{r+s}\overline{w_{r+s}})$$

が成り立つならば、$r = p, s = q$ である。

この定理が成り立つので、エルミート行列 A から定義されるエルミート形式 $A[z]$ に対しても、標準形、正値、半正値、負値、半負値の概念が２次形式の場合と同様に定義できる。

演習 5.17. つぎの２次形式の符号数、標準形および標準形への座標変換を表す行列を求めよ。
(1) $x_1x_2 + x_2x_1$　　(2) ${x_2}^2 + x_1x_3 + x_3x_1$
(3) $2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$

演習 5.18. 実数 a に対して、

$$A = \begin{pmatrix} 2a & i & 0 \\ -i & 4a & -i \\ 0 & i & 2a \end{pmatrix}$$

とおく。エルミート行列 A が正値であるための a に関する必要十分条件を求めよ。

演習 5.19. 対称行列 A に対して次の (a), (b), (c) は同値であることを示せ。
(a) A は半正値
(b) ある実行列 P に対して $A = {}^tPP$
(c) ある対称行列 B に対して $A = B^2$
さらに半正値な A に対して (c) をみたす B は唯一つであることを示せ。

演習 5.20. $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ とするとき以下の問いに答えよ。
(1) 正値エルミート行列 $Q \in M_{nn}(\mathbb{C})$ で $A{}^t\overline{A} = Q^2$ をみたすものが唯一つ存在することを示せ。
(2) Q を (1) で与えられる正値エルミート行列とし、$P = Q^{-1}A$ とおくとき、P はユニタリー行列であることを示せ。
(3) Q を (1) で与えられる正値エルミート行列、$P = Q^{-1}A$ とする。いまある正値エルミート行列 L とユニタリー行列 U に対して $A = LU$ が成立するなら、$L = Q, U = P$ が成り立つことを示せ。

演習 5.21. A, B をエルミート行列とする。A, B のうち一方が正値、もう一方が半正値のとき AB の固有値はすべて非負の実数であることを示せ。

5.5 随伴変換と正規変換

この節では複素ベクトル空間上の線形写像が正規直交基底で対角化されるための必要十分条件について考える。実ベクトル空間の場合は、固有値として実数しか許されないので定理 5.3.2 より正規直交基底で対角化されるための必要十分条件は対称変換であることに他ならない。

定理 5.5.1. *U, V を有限次元 K-vector space とし、$(\cdot,\cdot)_U, (\cdot,\cdot)_V$ をそれぞれ U, V の内積とする。さらに $f \in L(U,V)$ とする。このとき任意の $u \in U, v \in V$ に対して、*

$$(f(u), v)_V = (u, f^*(v))_U$$

をみたす $f^* \in L(V,U)$ が唯一つ存在する。さらに $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の正規直交基底、$(g_1, \cdots, g_m)$ を V の正規直交基底、$A \in M_{mn}(K)$ を $(e_1, \cdots, e_n), (g_1, \cdots, g_m)$ に関して f を表現する行列とするとき、f^* を表現する行列は、${}^t\overline{A}$ である。

証明. いま $(g_1, \cdots, g_m)(e_1, \cdots, e_n)$ に関して ${}^t\overline{A}$ で表現される 1 次変換を $f^* \in L(V,U)$ とする。このとき、$u \in U, v \in V$, $x \in K^n$ を u の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標、$y \in K^n$ を v の $(g_1, \cdots, g_m)$ に関する座標とすれば、

$$(f(u), v)_V = (Ax, y)_{K^m} = {}^tx{}^tA\overline{y} = {}^tx\overline{({}^t\overline{A}y)} = (x, {}^t\overline{A}y)_{K^n} = (u, f^*(v))_U.$$

いま $g \in L(V,U)$ であり、任意の $u \in U, v \in V$ に対して $(f(u), v)_V = (u, g(v))_U$ が成り立つならば、$(u, g(v) - f^*(v))_U = 0$. これが任意の $u \in U$ に対して成り立つので $g(v) = f^*(v)$. よって $g = f^*$. □

定義 5.5.2. (1) U, V を有限次元 K-vector space とし、$(\cdot,\cdot)_U, (\cdot,\cdot)_V$ をそれぞれ U, V の内積とする。$f \in L(U,V)$ に対して定理 5.5.1 で与えられる $f^* \in L(V,U)$ を f の随伴変換 (adjoint transformation) とよぶ。
(2) $A \in M_{nm}(K)$ に対して ${}^t\overline{A} \in M_{mn}(K)$ を A の随伴行列と呼ぶ。

次の命題は、ユニタリー（直交）変換、エルミート（対称）変換の定義と定理 5.5.1 より明らかである。

命題 5.5.3. *U を有限次元 K-vector space, $(\cdot,\cdot)$ を U の内積、$f \in L(U)$ とする。*
(1) f がユニタリー（直交）変換 $\Leftrightarrow$ $f \circ f^*$ が U の恒等写像
(2) f がエルミート（対称）変換 $\Leftrightarrow$ $f = f^*$.

定義 5.5.4. (1) U を K-vector space, $(\cdot,\cdot)$ を K の内積、$f \in L(U)$ とする。$f^* \circ f = f \circ f^*$ が成り立つとき f を正規変換 (normal transformation) という。
(2) $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ に対して、${}^t\overline{A}A = A{}^t\overline{A}$ が成り立つとき A を正規行列 (normal matrix) という。

定理 5.5.5. U を有限次元 $\mathbb{C}$-*vector space,* $(\cdot,\cdot)$ を U の内積、$f \in L(U)$ とする。さらに $(e_1,\cdots,e_n)$ を $(U,(\cdot,\cdot)$ の正規直交基底、$A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ を $(e_1,\cdots,e_n)$ に関して f を表現する行列とする。このとき次の 4 つの条件は同値である。
(1) f は正規変換である。
(2) A は正規行列である。
(3) あるユニタリ行列 P とある $\lambda_1,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ に対して、

$$
{}^t\overline{P}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

(4) $(U,(\cdot,\cdot))$ の正規直交基底 $(g_1,\cdots,g_n)$ と $\lambda_1,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ が存在して、任意の $i=1,\cdots,n$ に対して $f(g_i)=\lambda_i g_i$.

注意. この定理で $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ に、ユニタリーを直交に置き換えたものは正しくない。詳しくは演習 5.22 を参照のこと。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) は明らか。(3) $\Leftrightarrow$ (4) も命題 5.2.7 より明らか。
(4) $\Rightarrow$ (1): (3) の右辺の対角行列を D とおくとき、f を $(g_1,\cdots,g_n)$ に関して表現する行列は D であり、f^* を $(g_1,\cdots,g_n)$ に関して表現する行列は $\overline{D}$. いま D も $\overline{D}$ も対角行列なので、$D\overline{D}=\overline{D}D$. よって $f\circ f^* = f^*\circ f$.
(1) $\Rightarrow$ (4): $n=\dim U$ に関する帰納法を用いる。$n=1$ のときはある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $f(u)=\lambda u$ が任意の $u \in U$ について成り立つので明らか。

n まで成立すると仮定する。$\dim U = n+1$ とする。λ_1 を f の一つの固有値とし $g_1 \in U$ を $|g_1|=1$ かつ $g_1 \in E_{\lambda_1}(f)$ をみたすように選ぶ。このとき $h_1,\cdots,h_n \in U$ で $(g_1,h_1,\cdots,h_n)$ が U の正規直交基底となるようなものが得られる。B を $(g_1,h_1,\cdots,h_n)$ に関して f を表現する行列とする。このとき

$$
B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \hat{b} \\ 0 & C \end{pmatrix}, {}^t\overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 \\ {}^t\bar{\hat{b}} & {}^t\overline{C} \end{pmatrix}
$$

ただし $\hat{b}=(b_1\cdots b_n) \in M_{1n}(\mathbb{C})$, $C \in M_{nn}(\mathbb{C})$ である。いま f は正規変換より ${}^t\overline{B}B = B{}^t\overline{B}$ である。${}^t\overline{B}B$ と $B{}^t\overline{B}$ の $(1,1)$-成分を比較すれば、$\hat{b}=0$ となる。すなわち、$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ となる。ここで $V = \langle h_1,\cdots,h_n \rangle$ とおけば、任意の $v \in V$ に対して $f(v) \in V$. よって $f|_V$（f の定義域を V に制限した

写像）は V から V への線形写像となる。さらに $f|_V$ を $(h_1, \cdots, h_n)$ に関して表現する行列は C であり ${}^t\overline{B}B = B{}^t\overline{B}$ より ${}^t\overline{C}C = C{}^t\overline{C}$. 従って $f|_V$ は V 上の正規変換。いま $\dim V = n$ より帰納法の仮定を用いれば、V の正規直交基底 $(g_2, \cdots, g_{n+1})$ と $\lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$ があって、任意の $i = 2, \cdots, n+1$ に対して $f(g_i) = \lambda_i g_i$. いま $(g_1, g_2, \cdots, g_{n+1})$ は正規直交基底であるので、$n+1$ でも (4) が成り立つ。 □

演習 5.22. 定理 5.5.5 で $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ に、ユニタリー行列を直交行列に置き換えたとき、$A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ で (2) をみたすが (3) をみたさないような例を挙げよ。またこのとき定理 5.5.5 の証明のどの部分が正しくなくなるのか指摘せよ。

演習 5.23. U を $\mathbb{C}$-vector space, $(\cdot, \cdot)$ を U の内積とする。$f \in L(U)$ が正規変換であるための必要十分条件は「任意の $u \in U$ に対して $|f(u)| = |f^*(u)|$」であることを示せ。

演習 5.24. $A \in M_{nn}(\mathbb{C})$ とする。「A がユニタリー行列 $\Leftrightarrow$ A が正規行列でありかつ A のすべての固有値の絶対値が 1」を示せ。

演習 5.25. B, C をエルミート行列、$A = B + iC$ とする。このとき A が正規行列になるための必要十分条件は $BC = CB$ であることを示せ。

演習 5.26. $\Omega \subseteq \{A | A \in M_{nn}(\mathbb{C}), {}^t\overline{A}A = A{}^t\overline{A}\}$ とする。いま任意の $A, B \in \Omega$ に対して $AB = BA$ が成立するならば、ユニタリー行列 P が存在して任意の $A \in \Omega$ に対して ${}^t\overline{P}AP$ が対角行列になることを示せ。