線形代数学続論

木上　淳
京都大学大学院情報学研究科
e-mail：kigami@i.kyoto-u.ac.jp

July 11, 2016

Contents

1 ベクトル空間 2 **2**
1.1 ベクトル空間の定義 2
1.2 ベクトル空間の基底 3
1.3 ベクトル空間の次元 5
1.4 部分ベクトル空間 6

2 １次変換、行列 **8**
2.1 １次変換と行列 8
2.2 逆変換、逆行列 10

3 基底の変換と固有ベクトル **13**
3.1 基底の変換と１次変換 14
3.2 固有値と固有ベクトル 18

4 Jordan の標準型 **25**
4.1 線形写像の直和 25
4.2 線形写像の分解 26
4.3 べき零作用素の標準型 31
4.4 Jordan の標準型 34

5 行列の指数関数と線型常微分方程式 **39**

Chapter 1

ベクトル空間2

1.1　ベクトル空間の定義

例 1.1.1. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \cdots, x_n \in K \right\}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ に対して和 $x+y \in K^n$ を $x+y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$。

スカラー $\alpha \in K$ に対して $\alpha x \in K^n$ を $\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$ と定義する。

ベクトル空間 = たし算と定数倍が定義されている集合
定数 = 実数 $\mathbb{R}$ または複素数 $\mathbb{C}$ （一般には可換体）

定義 1.1.2. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。集合 U が K-ベクトル空間 (K-vector space) であるとは、任意の $u, v \in U$ に対して $u + v$, 任意の $\alpha \in K$ および任意の $u \in U$ に対して $\alpha \cdot u$ が決まって次の (V1) から (V7) の性質を満たすこと、

(V1) $a, b, c \in U \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$

(V2) $a, b \in U \Rightarrow a + b = b + a$

(V3) ある $0 \in U$ があって任意の $a \in U$ に対して $a + 0 = a$
0 を零ベクトル (zero vector) という。

(V4) 任意の $a \in U$ に対してある $x \in U$ があり $a + x = 0$.（すなわちたし算にかんする逆元の存在）

(V5) 任意の $a \in U$ に対して $1 \cdot a = a$. ただし $1 \in K$.

(V6) 任意の $a, b \in U$, 任意の $\alpha \in K$ に対して $\alpha \cdot (a + b) = (\alpha \cdot a) + (\alpha \cdot b)$.

(V7) 任意の $a \in U$, 任意の $\alpha, \beta \in K$ に対して
$(\alpha + \beta) \cdot a = (\alpha \cdot a) + (\beta \cdot a), (\alpha\beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$

$u, v \in U$ に対して $u + v$ を u と v の和、$\alpha \in K, u \in U$ に対して $\alpha \cdot u$ を u の定数倍（スカラー倍）という。$\alpha \cdot u$ を αu と書く。

注意. U がベクトル空間ならば、任意の $u \in U$ に対して $0 \cdot u = 0$
$(0 \cdot u) + (0 \cdot u) = (0 + 0) \cdot u = 0 \cdot u$ より

1.2 ベクトル空間の基底

この節では $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とし、U は K-vector space とする。

定義 1.2.1. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, U を K-vector space とする。このとき $V \subseteq U$ が U の部分ベクトル空間 (subspace) であるとは、

(1) 任意の $u, v \in V$ に対して $u + v \in U$,

(2) 任意の $k \in K$, 任意の $u \in V$ に対して $ku \in V$

が成り立つことである。

命題 1.2.2. $a_1, \ldots, a_m \in U$ に対して、

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle = \{x_1 a_1 + \ldots + x_m a_m | x_1, \ldots, x_m \in K\}$$

とおくとき、$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ は U の *subspace* である。

$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ を $\{a_1, \ldots, a_m\}$ から生成される U の subspace という。

定義 1.2.3 (基底)**.** $e_1, \cdots, e_n \in U$ とする。

(1) $(e_1, \cdots, e_n)$ が１次独立 (linearly independent) であるとは、任意の $x_1, \cdots, x_n \in K$ に対して $x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = 0$ ならば $x_1 = \cdots = x_n = 0$ が成り立つことである。

(2) $(e_1, \cdots, e_n)$ が U の基底 (base, basis) を成すとは、次の (B1), (B2) が成り立つことである。
(B1)　$(e_1, \cdots, e_n)$ は１次独立
(B2)　$\langle e_1, \ldots, e_m \rangle = U$

注意. $(e_1, \cdots, e_n)$ が U の基底ならば、任意の $u \in U$ に対してある $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ があって

$$u = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

と書ける。この $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ は u に対してただ一通りに決まる。実際 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ に対して

$$u = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$$

ならば

$$x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$$

したがって

$$(x_1 - y_1) e_1 + \cdots + (x_n - y_n) e_n = 0$$

$(e_1, \cdots, e_n)$ は１次独立なので $x_1 - y_1 = \cdots = x_n - y_n = 0$. u に対してただ一通りに決まる $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ を u の基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ に関する座標という。

例 1.2.4. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。K-vector space K^n において

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき $(e_1, \cdots, e_n)$ は K^n の基底

例題 1.2.5. $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^3$ の元 f_1, f_2, f_3 を

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えるとき (f_1, f_2, f_3) は $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ。

解答. 任意の $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$x = (x_1 - x_2)f_1 + (x_2 - x_3)f_2 + x_3 f_3$$

が成り立つ。さらに $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ に対して $k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 = 0$ とするとき、

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 \\ k_2 + k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ となり (f_1, f_2, f_3) は１次独立である。 □

1.3　ベクトル空間の次元

定理 1.3.1. *U を vetor space, $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底とする。このとき $m > n$ に対して、$f_1, \cdots, f_m \in U$ とするとき $(f_1, \cdots, f_m)$ は１次独立ではない。*

系 1.3.2. *U を vector space, $(e_1, \cdots, e_n)$ および $(f_1, \cdots, f_m)$ を U の基底とするとき $m = n$.*

定義 1.3.3. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. U を K-vector space とする。U が（有限個の元からなる）基底をもつとき U を有限次元 vector space という。そして $(e_1, \cdots, e_n)$ が U の基底であるとき n を vector space U の（K 上の）次元 (dimension) と呼び $n = \dim_K U$ と書く。暗黙のうちに K がわかっているときは $\dim_K U$ のかわりに $\dim U$ を用いることもある。

例 1.3.4. (1) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.
(2) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n, \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

補題 1.3.5. *U を vector space, $f_1, \cdots, f_m \in U$ であり $(f_1, \cdots, f_m)$ は１次独立であるとする。いま $u \in U$ が $u \notin \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$ をみたすならば、$(f_1, \cdots, f_m, u)$ は１次独立である。*

証明. $k_1, \cdots, k_m, k \in K$ に対して、$k_1 f_1 + \cdots + k_m f_m + ku = 0$ とする。このとき $u \notin \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$ より $k = 0$. ここで $(f_1, \cdots, f_m)$ は１次独立であるから $k_1 = \cdots = k_m = 0$. 従って $(f_1, \cdots, f_m, u)$ は１次独立。 □

補題 1.3.6. U を有限次元の *vector space,* $\dim U = n$ とする。いま $f_1, \cdots, f_n \in U$ で $(f_1, \cdots, f_n)$ が１次独立ならば $(f_1, \cdots, f_n)$ は U の基底である。

証明. ある $u \in U$ で $u \notin \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ とするとき $(f_1, \cdots, f_n, u)$ は１次独立。これは定理 1.3.1 に反する。従って $U = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$. よって $(f_1, \cdots, f_n)$ は基底である。 □

定理 1.3.7. U を有限次元の *vector space,* $\dim U = n$ とする。このとき $m < n$ に対して $f_1, \cdots, f_m \in U$ かつ $(f_1, \cdots, f_m)$ は１次独立であるとする。このときある $f_{m+1}, \cdots, f_n \in U$ がとれて、$(f_1, \cdots, f_n)$ が U の基底となるようにできる。

証明. $m < n$ であるから定理 1.3.1 より $(f_1, \cdots, f_m)$ は U の基底ではない。従って $U \neq \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$. すなわちある $u \in U$ で $u \notin \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$. 補題 1.3.5 より $(f_1, \cdots, f_m, u)$ は１次独立である。$u = f_{m+1}$ とする。この操作を繰り返すことで $f_{m+1}, \cdots, f_n \in U$ を $(f_1, \cdots, f_n)$ が１次独立となるように選ぶことができる。ここで補題 1.3.6 より $(f_1, \cdots, f_n)$ は U の基底となる。 □

1.4　部分ベクトル空間

定理 1.4.1. U を *vector space,* $a_1, \cdots, a_m \in U$ で少なくとも一つの $a_i \neq 0$ とする。このときある $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$ で $(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$ が $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ の基底となるものが存在する。特に $\langle a_1, \cdots, a_m \rangle$ は有限次元 *vector space* である。

命題 1.4.2. U を K*-vector space* とする。$V_1, \ldots, V_m$ をそれぞれ U の *subspace* とするとき、

$$V_1 + \ldots + V_m = \{x_1 + \ldots + x_m | \text{任意の } i = 1, \ldots, m \text{ で } x_i \in V_i\}$$

とおくとき、$V_1 + \ldots + V_m$ は U の *subspace* である。

定理 1.4.3. U を有限次元 K*-vector space* とする。$V_1, \ldots, V_m$ をそれぞれ U の *subspace* とするとき、次の３つは同値
(1) V_i の基底を $(a_{i1}, \ldots, a_{ij_i})$ とするとき、U を K*-vector space* とする。$V_1, \ldots, V_m$ をそれぞれ U の *subspace* とするとき、

$$(a_{11}, \ldots, a_{1j_1}, a_{21}, \ldots, a_{2j_2}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mj_m})$$

は $V_1+\ldots+V_m$ の基底となる。
(2)

$$\dim(V_1+\ldots+V_m)=\dim V_1+\ldots+\dim V_m$$

(3) $(x_1,\ldots,x_m)\in V_1\times\ldots\times V_m$ で

$$x_1+\ldots+x_m=0$$

ならば $(x_1,\ldots,x_m)=(0,\ldots,0)$.

証明. (1) ⇒ (2) は明らか。
(3) ⇒ (1):

$$V_1+\ldots+V_m=\langle a_{11},\ldots,a_{1j_1},a_{21},\ldots,a_{2j_2},\ldots,a_{m1},\ldots,a_{mj_m}\rangle$$

は明らか。$(a_{11},\ldots,a_{1j_1},a_{21},\ldots,a_{2j_2},\ldots,a_{m1},\ldots,a_{mj_m})$ が一次独立であることを示せばよい。いま、

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{j_i}x_{ik}a_{ik}=0$$

とするとき、(3) より、任意の i で $\sum_{k=1}^{j_i}x_{ik}a_{ik}=0$. $(a_{11},\ldots,a_{ij_i})$ は一次独立なので、任意の k で $x_{ik}=0$. 従って、任意の i,k で $x_{ik}=0$. よって、$(a_{11},\ldots,a_{1j_1},a_{21},\ldots,a_{2j_2},\ldots,a_{m1},\ldots,a_{mj_m})$ は一次独立。
(2) ⇒ (3) 対偶を示す。$(u_1,\ldots,u_m)\in V_1\times\ldots\times V_m$ に対して、

$$u_1+\ldots+u_m=0$$

で、ある i について $u_i\neq 0$ とする。簡単のために $u_1\neq 0$ とするとき、V_1 の基底として適当な $a_1,\ldots,a_l$ が選べて $(u_1,a_1,\ldots,a_l)$ がとれる。いま $i\geq 2$ で V_i の基底を $(b_{i1},\ldots,b_{ij_i})$ とするとき、$u_1\in V_2+\ldots+V_m$ なので

$$V_1+V_2+\ldots+V_m=\langle a_1,\ldots,a_l,b_{21},\ldots,b_{2j_2},\ldots,b_{m1},\ldots,b_{mj_m}\rangle$$

従って、

$$\dim(V_1+\ldots+V_m)<\dim V_1+\ldots+\dim V_m$$

□

定義 1.4.4. U を有限次元 K-vector space とする。$V_1,\ldots,V_m$ をそれぞれ U の subspace とし定理 1.4.3 の条件のいずれかが成り立つとき、$V_1+\ldots+V_m$ を

$$V_1\oplus\ldots\oplus V_m$$

と書き、$V_1,\ldots,V_m$ の直和（direct sum）と呼ぶ。

Chapter 2

１次変換、行列

2.1 １次変換と行列

定義 2.1.1. $K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ として U を K-vector space とする。いま $f : U \to U$ が１次変換（線形変換、linear transformation, linear map）であるとは、

(L1) 任意の $x, y \in U$ に対して $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

(L2) 任意の $x \in U$, 任意の $k \in K$ に対して $f(kx) = kf(x)$

が成り立つことである。

命題 2.1.2. *$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とし、U を K-vector space とする。いま*

$$L(U) = U \text{ から } U \text{ への } \textit{linear map} \text{ の全体}$$

とする。このとき $f, g \in L(U)$ に対して、$f + g : U \to U$ を、任意の $x \in U$ に対して $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ と定義するとき $f + g \in L(U)$ である。また $k \in K, f \in L(U)$ に対して $kf : U \to V$ を、任意の $x \in U$ に対して $(kf)(x) = kf(x)$ と定義するとき $kf \in L(U)$ である。さらにこの和と定数倍の演算に関して $L(U)$ は K-vector space になる。

例 2.1.3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ で $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して

$$f\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

とするとき f は linear map. さらに $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m} \in M_{mm}(K)$ に対

して、$f : K^m \to K^m$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mm}x_m \end{pmatrix}$$

と定義するとき f は linear map である。命題 2.1.4 より K^m から K^m への linear map はこの形（行列で表されるもの）に限ることがわかる。すなわち $L(K^m)$ は $M_{mm}(K)$ と同一視できる。

命題 2.1.4. *U を有限次元 K-vector space, $f : U \to U$ を linear map とする。さらに $(a_1, \cdots, a_m)$ を U の基底とする。いま $f(a_j)$ の $(a_1, \cdots, a_m)$ に関する座標を $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ として、$A \in M_{mm}(K)$ を $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m}$ と定義する。ここで $x, f(x) \in U$ の $(a_1, \cdots, a_m)$ に関する座標をそれぞれ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ とするとき、*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

が成立する。A を基底 $(a_1, \cdots, a_m)$ に関して f を表現する行列あるいは基底 $(a_1, \cdots, a_m)$ に関する f の表現行列という。

証明. $x = x_1a_1 + \cdots + x_na_m$ であるので、$f(x) = x_1f(a_1) + \cdots + x_nf(a_m)$. いま $f(a_j) = a_{1j}a_1 + \cdots + a_{mj}a_m$ であるから、

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \big) a_i \Big)$$

これより $y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$. □

命題 2.1.5. *U を K-vector space, $f \in L(U)$ とする。このとき*

$$\mathrm{Im}f = \{f(x) | x \in U\}, \mathrm{Ker}f = \{x | x \in U, f(x) = 0\}$$

とする。このとき $\mathrm{Im}f, \mathrm{Ker}f$ はそれぞれ U の subspace である。$\mathrm{Im}f$ を f の像 (image)、$\mathrm{Ker}f$ を f の核 (kernel) という。さらに f が単射（１対１）$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}f = \{0\}$.

証明. $f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2), kf(x)=f(kx)$ より $\mathrm{Im}f, \mathrm{Ker}f$ が subspaces になることは明らか。いま f が単射であるとするとき、$f(x)=0$ とすると $f(x)=f(0)$ より $x=0$. よって $\mathrm{Ker}f=\{0\}$. 逆に $\mathrm{Ker}f=\{0\}$ とするとき、$f(x_1)=f(x_2)$ ならば $f(x_1-x_2)=0$. $x_1-x_2\in\mathrm{Ker}f$ より $x_1=x_2$. すなわち f は単射。 □

定理 2.1.6 (次元定理)**.** *U を有限次元 K-vector spaces, $f\in L(U)$ とする。このとき*

$$\dim\mathrm{Im}f+\dim\mathrm{Ker}f=\dim U$$

証明. いま $\mathrm{Ker}f$ の基底を $(a_1,\cdots,a_m)$ とする。このとき定理 1.3.7 よりある $b_1,\cdots,b_n\in U$ が選べて、$(a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n)$ が U の基底となるようにできる。任意の $x\in U$ に対して、$x=\alpha_1a_1+\cdots+\alpha_ma_m+\beta_1b_1+\cdots+\beta_nb_n$ とすれば、$f(x)=\beta_1f(b_1)+\cdots+\beta_mf(b_n)$ である。したがって、$\mathrm{Im}f=\langle f(b_1),\cdots,f(b_n)\rangle$. 次に $(f(b_1),\cdots,f(b_n))$ が１次独立であることを示す。$\beta_1f(b_1)+\cdots+\beta_nf(b_n)=0$ とすれば $f(\beta_1b_1+\cdots+\beta_nb_n)=0$. すなわち $\beta_1b_1+\cdots+\beta_nb_n\in\mathrm{Ker}f$ となる。これより $\beta_1=\cdots=\beta_n=0$. よって $(f(b_1),\cdots,f(b_n))$ は１次独立であり、$\mathrm{Im}f$ の基底となる。以上より、$\dim U=m+n=\dim\ker f+\dim\mathrm{Im}f$. □

2.2 逆変換、逆行列

定義 2.2.1. U を K-vector spaces, $f\in L(U)$ とする。f が正則である（or 可逆である、逆を持つ）とは、ある $g\in L(U)$ に対して、$f\circ g=I_U, g\circ f=I_U$ が成立することである。（I_U は U の恒等写像である。）このとき g を f の逆写像 (inverse) といい、$g=f^{-1}$ と書く。

命題 2.2.2. *U を K-vector spaces, $f\in L(U)$ とする。*

(1) f が正則 $\Leftrightarrow$ f は単射（１対１）かつ全射（上への写像）

(2) f が正則ならば f の逆写像は一意に決まる。

(3) f は正則とする。 $e_1,\cdots,e_m\in U$ で $(e_1,\cdots,e_m)$ が１次独立ならば $(f(e_1),\cdots,f(e_m))$ も１次独立である。

証明. (1) $\Rightarrow$ $x_1,x_2\in U$ に対して $f(x_1)=f(x_2)$ ならば、$x_1=g(f(x_1))=g(f(x_2))=x_2$. したがって f は単射。また任意の $y\in U$ に対して、$f(g(y))=y$ より $y\in\mathrm{Im}f$. したがって $\mathrm{Im}f=U$.
$\Leftarrow$ $y\in V$ に対して $g(x)=y$ となる $x\in U$ がただ一つ決まる。$x=g(y)$ とし

て $g: U \to U$ を定義する。定義より、$f \circ g = I_U, g \circ f = I_U$. 次に $g \in L(U)$ をしめす。いま、$y_1, y_2 \in U$ とする。このとき、

$$f(g(y_1) + g(y_2)) = f(g(y_1)) + f(g(y_2)) = y_1 + y_2.$$

この式を g で写し、$g \circ f = I_U$ を使えば、

$$g(y_1) + g(y_2) = g(y_1 + y_2).$$

次に $y \in V, k \in K$ に対して、

$$f(kg(y)) = kf(g(y)) = ky$$

この式を g で写し $g \circ f = I_U$ と使うと、

$$kg(y) = g(ky)$$

よって $g \in L(U)$ となり、f は正則である。

(2) (1) の $\Leftarrow$ の証明より g が一意的に決まるのは明らか。

(3) ある $k_1, \cdots, k_m \in K$ に対して、$k_1 f(e_1) + \cdots + k_m f(e_m) = 0$ とするとき、$g(k_1 f(e_1) + \cdots + k_m f(e_m)) = k_1 e_1 + \cdots + k_m e_m = 0$. $(e_1, \cdots, e_m)$ は１次独立であるので $k_1 = \cdots = k_m = 0$. よって $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ は１次独立。$(e_1, \cdots, e_m)$ を U の基底とするとき、$(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ は１次独立であり、$U = f(U) = \langle f(e_1), \cdots, f(e_m) \rangle$. よって $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ は U の基底である。 □

系 2.2.3. U を有限次元の *vector spaces* とする。また $f \in L(U)$ とする。このとき次の *4* つの条件は同値である。

(1) f は正則である。

(2) 任意の $m \in \mathbb{N}$, 任意の $e_1, \cdots, e_m \in U$ に対して $(e_1, \cdots, e_m)$ が１次独立ならば $(f(e_1), \cdots, f(e_m))$ も１次独立である。

(3) $\mathrm{Ker} f = \{0\}$. すなわち f は単射である。

(4) $\mathrm{Im} f = U$. すなわち f は全射である。

証明. (1) ⇒ (2) は命題 2.2.2-(3) より明らか。
(2) ⇒ (4): $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底とするとき、$\dim U = n$. 補題 1.3.6 より $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ は V の基底となる。従って $\mathrm{Im} f = U$.
(3) ⇔ (4): 定理 2.1.6 より、$\dim ker f = 0 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim U$. これより明らか。
(3) ⇒ (1): (3) ⇒ (4) より、(3) かつ (4) が成り立つ。このとき命題 2.2.2 より f は正則である。 □

定理 2.2.4. U, V を有限次元 *vector spaces* とし、$(a_1, \cdots, a_m)$ を U の基底とする。さらに $f \in L(U)$ とし、f を $(a_1, \cdots, a_m)$ に関して表現する行列を $A \in M_{mm}(K)$ とする。このとき

$$f \text{ が正則} \Leftrightarrow A \text{ が正則}$$

さらに、f^{-1} を $(b_1, \cdots, b_m), (a_1, \cdots, a_n)$ に関して表現する行列は A^{-1} である。

証明. f が正則ならば、f^{-1} の $(b_1, \cdots, b_m), (a_1, \cdots, a_n)$ に関する表現行列を B とすれば命題 **??** より B が A の逆行列であることがわかる。逆に、A が正則ならば A^{-1} を $(a_1, \cdots, a_m)$, に関する表現行列とするような $g \in L(V)$ をとれば $g = f^{-1}$ となることがわかる。 □

Chapter 3

基底の変換と固有ベクトル

$e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^2$ を $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。ここで、$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を基底 (e_1, e_2, e_3) に関してする表現行列が

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

である linear map とする。このとき、$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすれば、$Af_1 = f_1$, $Af_2 = -f_2$, $Af_3 = 2f_3$ が成り立つ。ここで、$\operatorname{rank}(f_1, f_2, f_3) = 3$ はであり、(f_1, f_2, f_3) は $\mathbb{R}^3$ の基底になっている。F を (f_1, f_2, f_3) に関して表現する行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。さて、$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ の (f_1, f_2, f_3) に関する座標を $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とするとき、

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

となる。すなわち $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$x = Py$$

が成り立つ。ここで、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.1 基底の変換と１次変換

$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, V を K-vector space とする。さらに $(e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n)$ を V の基底とする。$v \in V$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を、$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, $(f_1, \cdots, f_n)$ に関する座標を $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ とするとき、x と y の関係を調べる。

f_j の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を $\begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$ とする。すなわち、$f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ である。いま $v = y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n$ であり、この両辺の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関す

る座標を考えれば、

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= y_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + y_n \begin{pmatrix} p_{1n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

ここで、$P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_{nn}(K)$ とすれば、

$$x = Py.$$

この P を $(e_1, \cdots, e_n)$ から $(f_1, \cdots, f_n)$ への基底変換の行列という。以上をまとめれば、

定理 3.1.1. *V を有限次元 K-vector space, $(e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n)$ を V の基底とする。いま f_j の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を $p_j \in K^n$ とし、$P \in M_{nn}(K)$ を $P = (p_1 \cdots p_n)$ とおく。(すなわち P はその j 列目の列ベクトルが p_j であるような行列) このとき P は正則であり、任意の $v \in V$ に対して、v の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を $x \in K^n$, $(f_1, \cdots, f_n)$ に関する座標を $y \in K^n$ とすれば、*

$$x = Py$$

が成立する。

証明. 証明すべきことは P が正則であること。いま $(f_1, \cdots, f_n)$ から $(e_1, \cdots, e_n)$ への基底変換の行列を $Q \in M_{nn}(K)$ とおく。$v \in V$ に対して $x, y \in K^n$ をそれぞれ v の $(e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n)$ に関する座標とすれば、$x = Py, y = Qx$. 従って $x = PQx, y = QPy$. これが任意の $x, y \in K^n$ について成り立つのであるから $PQ = QP = I_n$. すなわち P は正則であり、$Q = P^{-1}$. □

定理 3.1.2. *U を有限次元 K-vector space, $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底とする。このとき任意の正則な $P \in M_{nn}(K)$ に対してある U の基底 $(f_1, \cdots, f_n)$ で、$(e_1, \cdots, e_n)$ から $(f_1, \cdots, f_n)$ への基底変換の行列が P となるものがただひとつ存在する。*

証明. $P = (p_{ij})$ とするとき、$j = 1, \cdots, n$ に対して、$f_j = p_{1j}e_1 + \cdots + p_{nj}e_j$ と定義する。このとき、$\operatorname{rank}(f_1, \cdots, f_n) = \operatorname{rank} P = n$ である。従って $(f_1, \cdots, f_n)$ は１次独立であり、補題 1.3.6 より $(f_1, \cdots, f_n)$ は U の基底に

なる。このとき $f_1, \cdots, f_n$ の定義より明らかに $(e_1, \cdots, e_n)$ から $(f_1, \cdots, f_n)$ への基底変換の行列は P である。このような $(f_1, \cdots, f_n)$ が唯一つしかないことは明らか。 $\square$

例 3.1.3. $V = \mathrm{T}_2(\mathbb{R})$ とする。V の基底として $(1, x, x^2)$ および $(1+x, 1-2x, -1+x+x^2)$ を考える。$1+x, 1-2x, -1+x+x^2$ の $(1, x, x^2)$ に関する座標はそれぞれ、$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ であるので、$(1, x, x^2)$ から $(1+x, 1-2x, -1+x+x^2)$ への基底変換の行列は、

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

次に基底を取り換えたとき、１次変換を表現する行列がどのように変わるかを考察する。

U, V を有限次元 K-vector space, $f \in L(U, V)$ とする。いま

$$(e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n) : U \text{ の基底},$$
$$(a_1, \cdots, a_m), (b_1, \cdots, b_m) : V \text{ の基底},$$

また

$P \in M_{nn}(K) : (e_1, \cdots, e_n)$ から $(f_1, \cdots, f_n)$ への基底変換の行列,
$Q \in M_{mm}(K) : (a_1, \cdots, a_m)$ から $(b_1, \cdots, b_m)$ への基底変換の行列,
$A \in M_{mn}(K) : (e_1, \cdots, e_n), (a_1, \cdots, a_m)$ に関する f の表現行列,
$B \in M_{mn}(K) : (f_1, \cdots, f_n), (b_1, \cdots, b_m)$ に関する f の表現行列

とする。このとき A と B の関係を考察する。

$$\begin{array}{ccccccc}
U & \xrightarrow{(f_1,\cdots,f_n)} & K^n & \xrightarrow{P} & K^n & \xleftarrow{(e_1,\cdots,e_n)} & U\\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle B} & & \downarrow{\scriptstyle A} & & \downarrow{\scriptstyle f}\\
V & \xrightarrow{(b_1,\cdots,b_n)} & K^m & \xrightarrow{Q} & K^m & \xleftarrow{(a_1,\cdots,a_n)} & V
\end{array}$$

いま $u \in U$ に対して $v = f(u) \in V$ とする。ここで u の $(e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n)$ に関する座標をそれぞれ $x, y \in K^n$、v の $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n)$ に関する座標をそれぞれ $z, w \in K^m$ とすれば、

$$z = Ax, w = By, x = Py, z = Qw.$$

従って、$Qw = z = Ax = APy$ より $w = Q^{-1}APy$. これが任意の $y \in K^n$ に対して成り立つのであるから

$$B = Q^{-1}AP$$

以上をまとめれば、

定理 3.1.4. U, V, f などを上で与えた通りとするとき、

$$B = Q^{-1}AP$$

とくに、$U = V, (a_1, \cdots, a_m) = (e_1, \cdots, e_n), (b_1, \cdots, b_m) = (f_1, \cdots, f_n)$ のときは、

$$B = P^{-1}AP$$

定義 3.1.5. $A, B \in M_{nn}(K)$ に対して、ある正則な $P \in M_{nn}(K)$ が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき、A と B は相似な行列であるという。

A と B が相似な行列ならば、

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P|^{-1}|A||P| = |A|$$

定理 3.1.2 と相似な行列の定義より次の定理が得られる。

定理 3.1.6. U を有限次元 K-*vector space,* $f \in L(U)$, $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底、A を $(e_1, \cdots, e_n)$ に関して f を表現する行列とする。いま B を A と相似な行列とする。このとき、U の基底 $(f_1, \cdots, f_n)$ で、$(f_1, \cdots, f_n)$ に関して f を表現する行列が B になるものがただひとつ存在する。

例題 3.1.7. $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ とする。

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底 (e_1, e_2, e_3) から (f_1, f_2, f_3) への基底変換の行列を求めよ。

(2) $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ は (e_1, e_2, e_3) に関して $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\1 & 3 & -3\\2 & 0 & -1\end{pmatrix}$ で表現されるとする。このとき T を (f_1, f_2, f_3) に関して表現する行列を求めよ。

解答. (1) 求める行列を P とすれば、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) T を (f_1, f_2, f_3) に関して表現する行列は、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ =&\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -36 & 45 \\ 2 & -21 & 21 \\ 4 & -30 & 27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

3.2 固有値と固有ベクトル

$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする。

定義 3.2.1. (1) U を K-vector space, $f \in L(U)$ とする。$\lambda \in K, u \in U$ $(u \neq 0)$ に対して、

$$f(u) = \lambda u$$

が成り立つとき、λ を f の固有値 (eigenvalue)、u を f の固有値 λ に属する固有ベクトル (eigenvector) という。
(2)˙ $A \in M_{nn}(K)$ とする。$\lambda \in K, x \in K^n$ $(x \neq 0)$ に対して、

$$Ax = \lambda x$$

が成り立つとき、λ を A の固有値、x を A の固有値 λ に属する固有ベクトルという。

K-vector space U, $f \in L(U)$, $(e_1, \cdots, e_n)$ を U の基底、$A \in M_{nn}(K)$ を f を $(e_1, \cdots, e_n)$ に関して表現する行列とする。さらに $u \in U$ の $(e_1, \cdots, e_n)$ に関する座標を $x \in K^n$ とするとき、$\lambda \in K$ に対して、

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

例 3.2.2. (1) A を $n \times n$ の対角行列とする。すなわち、$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ に対して、

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とおく。このとき A の固有値は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. $e_1, \cdots, e_n \in K^n$ を、$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば、固有値 λ_i に属する固有ベクトルは e_i の定数倍である。

(2) $U = C^\infty(\mathbb{R}) = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ は $\mathbb{R}$ 上無限階微分可能 $\}$ とする。このとき $\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ を $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対して $\frac{d}{dx}u = \frac{du}{dx}$ と定義する。このとき $\frac{d}{dx}$ は1次変換になる。ここで、$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $\frac{d}{dx}$ の固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ に属する固有ベクトルとすれば、

$$\frac{df}{dx} = \lambda f \Leftrightarrow \text{ある } C \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(x) = Ce^{\lambda x}$$

従って $\frac{d}{dx}$ は任意の実数を固有値に持つ。

定理 3.2.3. $A \in M_{nn}(K)$ とする。$\lambda \in K$ に対して、$F_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$ と定義するとき、

$$\lambda \in K \text{ が } A \text{ の固有値} \Leftrightarrow F_A(\lambda) = 0$$

$A \in M_{nn}(K)$ に対して $F_A(\lambda)$ は λ の n 次の多項式になる。$F_A(\lambda)$ を A の固有多項式（または特性多項式、characteristic polynomial）と呼ぶ。いま $B = P^{-1}AP$

証明. ある $x \in K^n, x \neq 0$ があって $Ax = \lambda x \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0$ □

命題 3.2.4. *U を有限次元 K-vector space, $f \in L(U)$ とする。$(e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n)$ を U の基底、A, B をそれぞれ f を $(e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_n)$ に関して表現する行列とするとき $F_A(\lambda) = F_B(\lambda)$.*

この命題より f を表現する行列の固有多項式は基底の選び方によらないことがわかる。f を表現する行列 A に対して $F_A(\lambda)$ を $F_f(\lambda)$ と書いて f の固有多項式と呼ぶ。

証明. 定理 3.1.4 より A と B は相似である。すなわちある正則な $P \in M_{nn}(K)$ があって $B = P^{-1}AP$. ここで、$|B - \lambda I_n| = |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| = |A - \lambda I_n|$ □

例題 3.2.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{33}(\mathbb{R})$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ。

解答. A の固有多項式は、

$$F_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2)$$

従って固有値は $1, 4, -2$.

固有値 1 に属する固有ベクトル：固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば、

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより $y = z = 0$ である。従って、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ （ただし $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$)

固有値 4 に属する固有ベクトル：固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば、

$$(A - 4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより $y = -3x = -z$. 従って $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ （ただし $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$）

固有値 -2 に属する固有ベクトル：$1, 4$ の場合と同様に計算すれば、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$t\begin{pmatrix}-5/3\\1\\1\end{pmatrix}$ （ただし $t\in\mathbb{R}, t\neq 0$） □

注意. 同じ行列でも $K=\mathbb{R}$ か $K=\mathbb{C}$ かで固有値が異なることがある。例えば、$J=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ とするとき、$F_J(\lambda)=\lambda^2+1$ となる。従って $J\in M_{22}(\mathbb{R})$ と考えるときは $F_J(\lambda)=0$ は $\mathbb{R}$ に解を持たないので、J は固有値を持たない。しかしながら $J\in M_{22}(\mathbb{C})$ と考えるときは、$F_J(\lambda)=0$ は解 $\lambda=\sqrt{-1},-\sqrt{-1}$ を持ちこれらは J の固有値である。

定義 3.2.6. U を有限次元 K-vector space, $f\in L(U)$ とする。f が対角化可能 (semisimple) であるとは、ある U の基底 $(e_1,\cdots,e_n)$ と $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in K$ に対して、任意の $i=1,\cdots,n$ で、$f(e_i)=\lambda_i e_i$ が成立することである。

命題 3.2.7. *U を有限次元 K-vector space, $f\in L(U)$ とする。このとき、次の４つの条件は同値である。*
(1) f は対角化可能
(2) U のある基底に関して f を表現する行列が対角行列になる。
(3) U のある基底に関する f の表現行列が対角行列と相似になる。
(4) U の任意の基底に関する f の表現行列が対角行列と相似になる。

証明. (1) $\Leftrightarrow$ (2) は定義より明らかである。
(2) $\Rightarrow$ (4): $(e_1,\cdots,e_n)$ を U の基底であり、$(e_1,\cdots,e_n)$ に関して f を表現する行列が対角行列 A になるものとする。ここで U の基底 $(a_1,\cdots,a_n)$ に関して f を表現する行列を B、$(e_1,\cdots,e_n)$ から $(a_1,\cdots,a_n)$ への基底変換の行列を P とする。このとき、定理 3.1.4 より $B=P^{-1}AP$ となり B は対角行列に相似である。
(4) $\Rightarrow$ (3) は明らか。
(3) $\Rightarrow$ (2): 定理 3.1.6 より明らか。 □

補題 3.2.8. *U を K-vector space, $f\in L(U)$ とする。$\lambda\in K$ に対して、f の λ に関する固有空間 $E_\lambda(f)$ を*

$$E_\lambda(f)=\{u|u\in U, f(u)=\lambda u\}$$

と定義する。このとき $E_\lambda(f)$ は U の subspace であり、 λ が U の固有値 $\Leftrightarrow E_\lambda(f)\neq\{0\}$.

混乱を生じないときは $E_\lambda(f)$ を E_λ と書くこともある。

定理 3.2.9. U を有限次元 K*-vector space,* $f \in L(U)$ とする。f のすべての固有値の集合を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ とする。($i \neq j$ ならば $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする。) このとき、

$$f \text{ が対角化可能} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \dim E_{\lambda_i}(f) = \dim U$$

この定理を示すために次の補題を用意する。

補題 3.2.10. U を有限次元 K*-vector space,* $f \in L(U)$ とする。f のすべての固有値の集合を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ とする。($i \neq j$ ならば $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする。) このとき $i = 1, \cdots, m$ で $u_i \in E_{\lambda_i}(f)$ かつ $u_1 + \cdots + u_k = 0$ ならば任意の $i = 1, \cdots, m$ に対して $u_i = 0$.

証明. $k = 1, \ldots, m$ に対して、「$u_i \in E_{\lambda_i}(f)$ が $i = 1, \ldots, k$ で成り立ち $u_1 + \ldots + u_k = 0$ ならば任意の $i = 1, \ldots, k$ で $u_i = 0$」を k に関する帰納法を用いる。$k = 1$ の時は明らか。$k - 1$ で成り立つとする。このとき、$i = 1, \cdots, k$ で $u_i \in E_{\lambda_i}$, $u_1 + \cdots + u_k = 0$ とする。いま、

$$f(u_1 + \cdots + u_k) = f(u_1) + \cdots + f(u_k) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0$$

これより

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_k u_k &= 0 \\ \lambda_k u_1 + \ldots + \quad \lambda_k u_{k-1} + \lambda_k u_k &= 0 \end{aligned}$$

なので、

$$(\lambda_1 - \lambda_k)u_1 + (\lambda_2 - \lambda_k)u_2 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)u_{k-1} = 0$$

帰納法の仮定より $i = 1, \cdots, k-1$ では $(\lambda_i - \lambda_k)u_i = 0$. いま $i = 1, \cdots, k-1$ では $\lambda_i \neq \lambda_k$ より $u_i = 0$. これより $u_1 + \cdots + u_k = u_k = 0$. □

定理 *3.2.9* の証明. $\Rightarrow$: 固有ベクトルからなる基底が存在することより明らか。
$\Leftarrow$: $i = 1, \cdots, m$ に対して $(e_{i,1}, \cdots, e_{i,n_i})$ を E_{λ_i} の基底とする。このとき、$\dim E_{\lambda_i} = n_i$ であり、$n_1 + \cdots + n_m = \dim U$ となる。次に

$$\mathbf{e} = (e_{1,1}, \cdots, e_{1,n_1}, e_{2,1}, \cdots, e_{2,n_2}, \cdots, e_{m,1}, \cdots, e_{m,n_m})$$

が1次独立であることを示す。いま、$a_{i,j} \in K$ に対して、

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}e_{i,j} = 0$$

とする。$u_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}e_{i,j}$ とおくと、$\sum_{i=1}^{m} u_i = 0$. 補題 3.2.10 で $k = m$ の場合より $i = 1, \cdots, m$ に対して $u_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}e_{i,j} = 0$. ここで $(e_{i,1}, \cdots, e_{i,n_i})$ は1次独立だから $j = 1, \cdots, n_i$ で $a_{i,j} = 0$. 従って $\mathbf{e}$ は1次独立になる。いま、$n_1 + \cdots + n_m = \dim U$ であるので補題 1.3.6 より $\mathbf{e}$ は U の基底である。固有ベクトルからなる基底が存在するので f は対角化可能である。 □

系 3.2.11. U を有限次元 K-*vector space*, $f \in L(U)$ とする。いま f が $\dim U$ 個の相異なる固有値を持つならば f は対角化可能である。

上の系における「f が $\dim U$ 個の相異なる固有値を持つ」という条件は「f の固有多項式が相異なる $\dim U$ 個の解を K に持つ」と同値である。

例題 3.2.12. 次の行列は対角化可能かどうか調べよ。($K = \mathbb{R}$ とする。)

$$(1)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

解答. (1) 固有多項式は、$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 8 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)$. よって固有値は $1, 3$.

E_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$ とすれば $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ これより $y = 2x$ かつ $x = z$. 従って $E_1 = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$ となり $\dim E_1 = 1$.

E_3: E_1 と同様の計算により $E_3 = \left\{ t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$. よって $\dim E_3 = 1$.

以上より、$dimE_1 + \dim E_3 = 2 < 3$ でありこの行列は対角化可能でない。

(2) 固有多項式は、$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. よって固有

値は $1, 2$.

E_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$ とすれば、$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. これより $x = 2y + z$. 従って $E_1 = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | y, z \in \mathbb{R} \right\}$ となり $\dim U = 2$.

E_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$ とすれば、$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. これより $2y+z = 0$ かつ $x = 3y + z$. 従って $E_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$ となり $\dim E_2 = 1$.

以上より $\dim E_1 + \dim E_2 = 3$ であるからこの行列は対角化可能である。 $\square$

演習 3.1. 次の行列の固有値および各固有値に属する固有ベクトルをすべて求めよ。さらに対角化可能かどうか調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

演習 3.2. $A \in M_{nn}(K)$ はある $m \in \mathbb{N}$ に対して、$A^m = 0$ のときべき零行列であるという。べき零行列の固有値は 0 だけであることを示せ。

演習 3.3. $A \in M_{nn}(K)$ とする。このとき $F_A(\lambda) = F_{{}^tA}(\lambda)$ であることを示せ。さらに A が対角化可能ならば ${}^tA$ も対角化可能であることを示せ。

演習 3.4. $A \in M_{nn}(K)$ は対角化可能であるとする。このとき $F_A(A) = 0$ であることを示せ。

演習 3.5. U を有限次元 K-vector space, $f, g \in L(U)$ とする。このとき $f \circ g$ と $g \circ f$ の固有多項式は一致することを示せ。

Chapter 4

Jordan の標準型

4.1 線形写像の直和

補題 4.1.1. $A \in M_n(K), B \in M_m(K)$ に対して、$C \in M_{n+m}(K)$ を

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

とおくと、$|C| = |A||B|$.

証明. $i \in \{1, \ldots, n\}$ かつ $j \in \{n+1, \ldots, n+m\}$ ならば $c_{ij} = 0$ より

$$\begin{aligned}
|C| &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+m}} sgn(\sigma) c_{1\sigma(1)} \cdots c_{n\sigma(n)} c_{n+1\sigma(n+1)} \cdots c_{n+m\,\sigma(n+m)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n, \tau \in \mathcal{S}_m} sgn(\sigma) c_{1\sigma(1)} \cdots c_{n\sigma(n)} c_{n+1\,n+\tau(1)} \cdots c_{n+m\,n+\tau(m)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_m} sgn(\tau) b_{1\tau(1)} \cdots b_{m\tau(m)} \\
&= |A||B|
\end{aligned}$$

□

命題 4.1.2. U を K-*vector space,* $V_1, \ldots, V_m$ は V の部分空間で $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ とする。いま $i = 1, \ldots, m$ に対して、$f_i \in L(V_i)$ が成り立つとき、$u = u_1 + \ldots + u_m \in U$, $u_i \in V_i$ に対して

$$f(u) = f(u_1) + \ldots + f(u_m)$$

とおくとき $f \in L(U)$ である。さらに U が有限次元の時、

$$F_f(\lambda) = F_{f_1}(\lambda) F_{f_2}(\lambda) \cdots F_{f_m}(\lambda)$$

が成り立つ。

証明. f が linear であることは f の定義より明らか。U が有限次元の時、$(e_{i1}, \ldots, e_{in_i})$ を V_i の基底とし A_i を $(e_{i1}, \ldots, e_{in_i})$ に関して f_i を表現する行列とするとき、f を $(e_{11}, \ldots, e_{1n_1}, \ldots, e_{m1}, \ldots, e_{mn_m})$ に関して表現する行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{pmatrix}$$

が成り立つ。補題 4.1.1 を用いれば

$$|A| = |A_1||A_2| \cdots |A_m|$$

□

定義 4.1.3. U を K-vector space, $V_1, \ldots, V_m$ は U の部分空間で $U = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ が成り立つとする。$i = 1, \ldots, m$ に対して $f_i \in L(V_i)$ のとき、命題 4.1.2 で定義される $f \in L(U)$ を $f_1, \ldots, f_m$ の直積といい $f = f_1 \oplus \cdots \oplus f_m$ と書く。

4.2 線形写像の分解

補題 4.2.1. *U を有限次元 K-vector space, $f : U \to U$, linear とする。このときある $m \geq 0$ に対して、*

$$\begin{gathered} \mathrm{Ker} f \subsetneq \mathrm{Ker} f^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Ker} f^m = \mathrm{Ker} f^{m+1} = \mathrm{Ker} f^{m+2} = \ldots \\ \mathrm{Im} f \supsetneq \mathrm{Im} f^2 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathrm{Im} f^m = \mathrm{Im} f^{m+1} = \mathrm{Im} f^{m+2} = \ldots \end{gathered}$$

証明. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{Ker} f^i \subseteq \mathrm{Ker} f^{i+1} \subseteq U$ なので、ある k で $\mathrm{Ker} f^k = \mathrm{Ker} f^{k+1}$ が成り立つ。そのような k のうち最小のものを m とおく。任意の $u \in \mathrm{Ker} f^{m+2}$ に対して、$f^{m+1}(f(u)) = 0$. よって $f(u) \in \mathrm{Ker} f^{m+1} = \mathrm{Ker} f^m$. 従って $f^{m+1} u = 0$. これより $\mathrm{Ker} f^{m+2} = \mathrm{Ker} f^{m+1} = \mathrm{Ker} f^m$. 同様の議論で $m \leq n$ ならば $\mathrm{Ker} f^n = \mathrm{Ker} f^m$. ここで次元定理より

$$\dim \mathrm{Ker} f^k + \dim \mathrm{Im} f^k = \dim U$$

従って

$\dim \mathrm{Im} f > \dim \mathrm{Im} f^2 > \ldots > \dim \mathrm{Im} f^m = \dim \mathrm{Im} f^{m+1} = \dim \mathrm{Im} f^{m+2} = \ldots.$

よって

$$\mathrm{Im} f \supsetneq \mathrm{Im} f^2 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathrm{Im} f^m = \mathrm{Im} f^{m+1} = \mathrm{Im} f^{m+2} = \ldots.$$

□

定義 4.2.2. 補題 4.2.1 における m を $m(f)$ と書き、

$$K(f) = \mathrm{Ker} f^{m(f)}, I(f) = \mathrm{Im} f^{m(f)}$$

と定義する。

補題 4.2.3. *U を K-vector space, $f : U \to U$, linear とする。$f(K(f)) \subseteq K(f)$ かつ $f(I(f)) \subseteq I(f)$ であり、*

$$U = K(f) \oplus I(f)$$

が成立する。

証明. $f(K(f)) \subseteq K(f), f(I(f)) \subseteq I(f)$ は補題 4.2.1 より明らか。いま $u \in K(f) \cap I(f)$ とする。このとき $f^m u = 0$ かつある $v \in U$ に対して $u = f^m(v)$. よって $f^{2m}(v) = f^m(u) = 0$. いま $\mathrm{Ker} f^2 m = \mathrm{Ker} f^m$ より $v \in \mathrm{Ker} f^m$. よって $u = f^m(v) = 0$. 従って $K(f) \cap I(f) = \{0\}$. さらに次元定理より $\dim K(f) + \dim I(f) = \dim \mathrm{Ker} f^m + \dim \mathrm{Im} f^m = \dim U$ より、$U = K(f) \oplus I(f)$.

□

定義 4.2.4. $K = \mathbb{C}$ とし、U を K-vector space とする。$f : U \to U$ linear とする。$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ を f の固有値の全体とし $i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする。このとき、

$$F_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{n_i}$$

と書ける。ここで

$$n(\lambda_i, f) = n_i$$

と定義する。さらに

$$E^*_{\lambda_i}(f) = \{u | u \in U, (f - \lambda_i I)^{n(\lambda_i, f)} u = 0\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i I)^{n(\lambda_i, f)}$$

とおく。

補題 4.2.5. $K = \mathbb{C}$ とし、U を K-*vector space* とする。$f : U \to U$ *linear* とする。$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ を f の固有値の全体とし $i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする。ここで $K_i = K(f - \lambda_i I), I_i = I(f - \lambda_i I)$ とおくとき、$\dim K_i = n(\lambda_i, f)$ であり $f(K_i) \subseteq K_i$ かつ $f(I_i) \subseteq I_i$. さらに、$f|_{K_i} = f_i, f|_{I_i} = \tilde{f}_i$ とおくと、

$$F_{f_i}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{n(\lambda_i, f)}$$
$$F_{\tilde{f}_i}(\lambda) = \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda)^{n(\lambda_j, f)}.$$

さらに、$K_i = E^*_{\lambda_i}(f)$ となる。

証明. $i = 1, \ldots, m$ に対して $m_i = m(f - \lambda_i I)$ とする。
(1) $f(K_i) \subseteq K_i$ かつ $f(I_i) \subseteq I_i$ であること：$u \in K_i$ とするとき $(f - \lambda_i)^{m_i} u = 0$. 従って、$(f - \lambda_i)^{m_i} f(u) = f(f - \lambda_i)^{m_i} u = 0$. 従って $f(u) \in K_i$. 次に $v \in I_i$ とすると、ある $u \in U$ で $v = (f - \lambda_i I)^{m_i} u$. ここで $f(v) = (f - \lambda_i I)^{m_i} f(u) \in I_i$.
(2) $\tilde{f}_i$ は λ_i を固有値にもたないこと： $u \in I_i$ に対して $\tilde{f}_i u = \lambda_i u$ とする。このときある $v \in U$ に対して $u = (f - \lambda_i I)^{m_i} v$ である。$0 = (\tilde{f} - \lambda_i I) u = (f - \lambda_i I)^{m_i + 1} v$ なので $v \in K_i$. 従って $u = (f - \lambda_i I)^{m_i} v = 0$.
(3) f_i の固有値は λ_i のみ： $u \in K_i$ で $f_i(u) = \lambda u$ とする。すなわち

$$(f - \lambda_i I)^{m_i} u = 0 \quad \text{かつ} \quad (f - \lambda I) u = 0$$

$g = f - \lambda I$ とおくとき、2 項定理を用いれば

$$0 = (f - \lambda_i I)^{m_i} u = (g + (\lambda - \lambda_i) I)^{m_i} u = (\lambda - \lambda_i)^{m_i} u$$

従って $\lambda \neq \lambda_i$ ならば $u = 0$. これより $\tilde{f}_i$ の固有値は λ_i のみである。
　いま

$$F_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda)^{n(\lambda_i, f)} = F_{f_i}(\lambda) F_{\tilde{f}_i}(\lambda)$$

(2), (3) より

$$F_{f_i}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{n(\lambda_i, f)} \quad \text{かつ} \quad F_{\tilde{f}_i}(\lambda) = \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda)^{n(\lambda_j, f)}$$

従って $\dim K_i = n(\lambda_i, f)$ である。ここで

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda_i I) \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \lambda_i I)^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \lambda_i I)^{m_i}$$

従って

$$n(\lambda_i, f) = \dim K_i \geq \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda_i I) + m_i - 1 \geq m_i$$

これより

$$E^*_{\lambda_i}(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i I)^{n(\lambda_i, f)} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i I)^{m_i} = K_i.$$

$\square$

定理 4.2.6. U を K-*vector space* とする。$f : U \to U$ *linear* とし $F_f(\lambda) = 0$ の解は全て K の元であるとする。$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ を f の固有値の全体とし $i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする。このとき

$$U = E^*_{\lambda_1}(f) \oplus E^*_{\lambda_2}(f) \oplus \ldots \oplus E^*_{\lambda_m}(f)$$

である。さらに任意の $i = 1, \ldots, m$ に対して $f(E^*_{\lambda_i}(f)) \subseteq E^*_{\lambda_i}(f)$, $\dim E^*_{\lambda_i}(f) = n(\lambda_i, f)$ であり $f|_{E^*_{\lambda_i}(f)} = f_i$ とおくと $F_{f_i}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{n(\lambda_i, f)}$ が成り立つ。

証明. m に関する帰納法を用いる。$m = 1$ の時は明らか。$m - 1$ まで成立したとする。$i = m$ として補題 4.2.5 を用いると、

$$U = I_m \oplus E^*_{\lambda_m}(f)$$

であり、$\dim E^*_{\lambda_m}(f) = n(\lambda_m, f)$. さらに $F_{f_m}(\lambda) = (\lambda_m - \lambda)^{n(\lambda_m, f)}$ となる。いま $\tilde{f}_m = f|_{I_m}$ に対して $F_{\tilde{f}_m}(\lambda) = \prod_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \lambda)^{n(\lambda_i, f)}$ である。これより $n(\lambda_i, \tilde{f}_m) = n(\lambda_i, f)$ が $i = 1, \ldots, m-1$ で成り立つ。次に $i = 1, \ldots, m-1$ に対して、$I_m \cap E_{\lambda_i}(f) = E_{\lambda_i}(\tilde{f}_m)$ であり $\dim E_{\lambda_i}(f) = \dim E_{\lambda_i}(\tilde{f}_m) = n(\lambda_i, f)$ なので　$E^*_{\lambda_i}(\tilde{f}_m) = E^*_{\lambda_i}(f)$, かつ $\tilde{f}_m|_{E^*_{\lambda_i}(\tilde{f}_m)} = f|_{E^*_{\lambda_i}(f)}$ である。よって $\tilde{f}_m : I_m \to I_m$ に帰納法の仮定を用いると、

$$I_m = E^*_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus E^*_{\lambda_{m-1}}(f)$$

でありさらに $\dim E^*_{\lambda_i}(f) = n(\lambda_i, f)$, $F_{f|_{E^*_{\lambda_i}(f)}}(\lambda) = (\lambda_m - \lambda)^{n(\lambda_i, f)}$ が $i = 1, \ldots, m-1$ で成立する。以上により

$$U = E^*_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus E^*_{\lambda_{m-1}}(f) \oplus E^*_{\lambda_m}(f)$$

かつ $i = 1, \ldots, m$ で $\dim E^*_{\lambda_i}(f) = n(\lambda_i, f)$, $F_{f|_{E^*_{\lambda_i}(f)}}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{n(\lambda_i, f)}$. よって m でも成立する。 $\square$

補題 4.2.7. $K = \mathbb{C}$ とし、U を 有限次元 *K-vector space,* $f : U \to U$ *linear* とし $F_f(\lambda) = 0$ の解は全て K の元であるとする。f の固有値が 0 しかないならば、$K(f) = U$. すなわち $f^{m(f)} = 0$ である。

証明. $F_f(\lambda) = |-\lambda|^{\dim U}$ となるので、$n(0, f) = \dim U$. 従って $\dim E_0^*(f) = \dim U$. よって $U = E_0^*(f) = K(F)$. □

定義 4.2.8. $K = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ とし、U を K-vector space とする。$f : U \to U$ は linear とする。ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $f^n = 0$ が成り立つとき f はべき零 (nilopotent) で有るという。

命題 4.2.9. U を *K-vector space* とする。$f : U \to U$ *linear* とし $F_f(\lambda) = 0$ の解は全て K の元であるとする。このとき f がべき零であるための必要十分条件は f の固有値が 0 のみであることである。

証明. f がべき零とする。f の 固有値を λ とし $u \in U \backslash \{0\}$ を固有値 λ に属する固有ベクトルとする.。$f^n(u) = \lambda^n u \neq 0$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ。ある n で $f^n(u) = 0$ より $\lambda = 0$.

f の固有値は 0 のみとするとき、補題 4.2.7 より $U = K(f) = \mathrm{Ker} f^{m(f)}$. 従って任意の $u \in U$ に対して $f^{m(f)}(u) = 0$. よって f はべき零である。 □

$K = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ とし、U を K-vector space とする。$f : U \to U$ は linear であり $F_f(\lambda) = 0$ の解は全て K に属するとする。$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ を f の固有値の全体とし $i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする。ここで

$$f_i = f|_{E^*_{\lambda_i}(f)}, \quad f_i^S = \lambda_i I_{E^*_{\lambda_i}(f)}, \quad f_i^N = f_i - \lambda_i I_{E^*_{\lambda_i}(f)}$$

とおくと定理 4.2.6 より $F_{f_i}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{n(\lambda_i, f)}$ なので

$$F_{f_i^N}(\lambda) = F_{f_i}(\lambda + \lambda_i) = (-\lambda)^{n(\lambda_i, f)}.$$

従って f_i^N の固有値は 0 のみである。すなわち f_i^N はべき零である。さらに補題 4.2.7 より $(f_i^N)^{m(f_i)} = 0$. 定理 4.2.4 の証明より $n(\lambda_i, f) \geq m(f_i)$ なので

$$(f_i^N)^{n(\lambda_i, f)} = 0.$$

また、

$$f_i = f_i^S + f_i^N, f_i^S \circ f_i^N = f_i^N \circ f_i^S$$

が成り立つ。ここで

$$f^S = f_1^S \oplus \ldots \oplus f_m^S \quad \text{かつ} \quad f^N = f_1^N \oplus \ldots \oplus f_m^N$$

とおけば f^S は対角化可能 (semisimple)、f^N はべき零（nilopotent) であり

$$f = f^S + f^N, f^S \circ f^N = f^N \circ f^S$$

が成り立つ。

定理 4.2.10 (Hamilton-Caley). *U を有限次元 K-vector space、$f : U \to U$ は linear とするとき*

$$F_f(f) = 0$$

証明. 上のように f_i^S, f_i^N をとるとき、全ての $i = 1, \ldots, m$ で

$$F_f(f_i) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda_j I - f_i)^{n(\lambda_j, f)} = (-f_i^N)^{n(\lambda_i, f)} \prod_{j \neq i} (\lambda_j I - f_i)^{n(\lambda_j, f)} = 0$$

従って $F_f(f) = 0$. □

行列で考えたときには

定理 4.2.11. *A を n 行 n 列の行列とするとき、*

$$F_A(A) = 0.$$

4.3 べき零作用素の標準型

定義 4.3.1. V を有限次元 K-vector space, $f : V \to V$ は linear でべき零であるとする。このとき、$v \in V$ に対して

$$n(v) = \min\{n | f^n(v) = 0\}$$

とし、さらに

$$Z(v) = \langle f^{n(v)-1}(v), \ldots, f(v), v \rangle$$

とおく。

補題 4.3.2. *V を有限次元 K-vector space, $f : V \to V$ は linear でべき零であるとする。$v \in V$ に対して、$\langle f^{n(v)-1}(v), \ldots, f(v), v \rangle$ は $Z(v)$ の基底である。*

証明. $(f^{n(v)-1}(v), \dots, f(v), v)$ が一次独立であることを示せばよい。$n = n(v)$ とする。いま、$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ に対して、

$$\alpha_1 v + \alpha_2 f(v) + \dots + a_{n-2} f^{n-1}(v) = 0$$

とするとき、

$$0 = f^{n-1}(\alpha_1 v + \alpha_2 f(v) + \dots + a_n f^{n-1}(v)) = a_1 f^{n-1}(v)$$

$f^{n-1}(v) \neq 0$ より、$\alpha_1 = 0$. $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ とするとき、

$$0 = f^{n-m-1}(\alpha_{m+1} f^m(v) + \dots + a_n f^{n-1}(v)) = \alpha_{m+1} f^{n-1}(v)$$

よって $\alpha_{m+1} = 0$. これより帰納的に $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. 従って $(f^{n-1}(v), \dots, f(v), v)$ は一次独立。 $\square$

ここで $f(Z(v)) \subseteq Z(v)$ である。$f|_{Z(v)}$ の $(f^{n(v)-1}, \dots, f(v), v)$ に関する表現行列を J_n とおくとき

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

命題 4.3.3. V は有限次元 *K-vector space,* $f : V \to V$ は *linear* でべき零とする。このときある $v_1, \dots, v_k \in V$ があって $V = Z(v_1) \oplus \dots \oplus Z(v_k)$ となる。

証明. $\dim V$ に関する帰納法を用いる。$\dim V = 1$ のときは明らかである。さて、$dImV = m$ で次元が $m-1$ 以下では命題は成立すると仮定する。いま f はべき零より $\dim \mathrm{Ker} f \geq 1$. よって、$dim \mathrm{Im} f < \dim V$. 従って $f|_{\mathrm{Im} f}$ に帰納法の仮定を適用すると、ある $u_1, \dots, u_l \in \mathrm{Im} f$ で $\mathrm{Im} f = Z(u_1) \oplus \dots Z(u_l)$ となるものが存在する。ここで、$f(v_i) = u_i$ となる $v_1, \dots, v_l$ を選ぶ。このとき

Claim 1: $W = Z(v_1) + \dots + Z(v_l)$ とするとき、$W = Z(v_1) \oplus \dots Z(v_l)$

Claim 1 の証明：いま $i = 1, \dots, l$ で $n_i = n(u_i)$ とおくと $n(v_i) = n_i + 1$. こ

こで $i=1,\ldots,l$ で $x_i \in Z(v_i)$ で $x_1+\ldots+x_l=0$ とする。このときある $\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,n_i+1} \in K$ に対して

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{i,1}v_i + \alpha_{i,2}f(v_i) + \ldots + \alpha_{i,n_i+1}f^{n_i}(v_i) \\ &= \alpha_{i,1}v_i + \alpha_{i,2}u_i + \ldots + \alpha_{i,n_i+1}f^{n_i-1}(u_i) \end{aligned}$$

いま $f(x_1)+\ldots+f(x_l)=0$ であり $f(x_i) \in Z(u_i)$ なので $f(x_i)=0$. よって

$$f(x_i) = \alpha_{i,1}u_i + \alpha_{i,2}f(u_i) + \ldots + \alpha_{i,n_i}f^{n_i-1}(u_i) = 0$$

$(f^{n_i-1}(u_i),\ldots,f(u_i),u_i)$ は一次独立なので $\alpha_{i,1}=\ldots=\alpha_{i,n_i}=0$. つまり $x_i=\alpha_{i,n_i+1}f^{n_i-1}(u_i) \in Z(u_i)$. $x_1+\ldots+x_l=0$ より任意の $i=1,\ldots,l$ で $x_i=0$. 定理 1.4.3 より $W=Z(v_1)\oplus\ldots\oplus Z(v_l)$. よって Claim 1 は成り立つ。
Claim 2: $V=W+\mathrm{Ker}f$.
Claim 2 の証明：$v \in V$ に対して $f(v) \in Z(u_1)\oplus\ldots Z(u_l)$ であり $Z(u_i)=f(Z(v_i))$ より、任意の $i=1,\ldots,l$ に対してある $y_i \in Z(v_i)$ があって

$$f(v) = f(y_1)+\ldots+f(y_l) = f(y_1+\ldots+y_l).$$

$y=y_1+\ldots+y_l$ とおくと $y \in W$ であり $f(v-y)=0$. 従って $v-y \in \mathrm{Ker}f$.
以上より $V+\mathrm{Ker}f$ であり Claim 2 は示された。
いま $\mathrm{Ker}f\cap W$ の基底を $(z_1,\ldots,z_p)$ とするとき、定理 1.3.7 より $e_1,\ldots,e_q \in \mathrm{Ker}f$ で $(z_1,\ldots,z_p,e_1,\ldots,e_q)$ が $\mathrm{Ker}f$ の基底となるものがある。ここで、

$$\begin{aligned} V = W \oplus \langle e_1,\ldots,e_1\rangle &= W \oplus Z(e_1)\oplus\ldots\oplus Z(e_q) \\ &= Z(v_1)\oplus\ldots\oplus Z(v_l)\oplus Z(e_1)\oplus\ldots\oplus Z(e_q) \end{aligned}$$

□

V は K-vector space であり $f: V \to V$ は linear でべき零のとき、命題 4.3.3 より適当な $v_1,\ldots,v_k \in V$ に対して

$$V = Z(v_1)\oplus\ldots\oplus Z(v_k)$$

となる。いま各 $i=1,\ldots,k$ に対して $Z(v_i)$ の基底として $(f^{n_i-1}(v_i),\ldots,f(v_i),v_i)$ をとれば $f|_{Z(v_i)}$ は行列 J_{n_i} で表される。よって V の基底としてこれらの基底を並べたもの $(f^{n_1-1}(v_1),\ldots,v_1,\ldots,f^{n_k-1}(v_k),\ldots,v_k)$ をとれば、この基

底に関して f を表現する行列は

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_k} \end{pmatrix}$$

（ただし 0 は適当な n, m に対して n 行 m 列の 0 行列である。）

以上をまとめると、

定理 4.3.4. *V を K-vector space, $g : V \to V$ は linear* かつべき零であるとする。このとき V の基底でその基底に関して g を表現する行列が、ある $k \in \mathbb{N}$ と $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ で $n_1 + \dots + n_k = 1$ をみたすものに対して、

$$\begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_k} \end{pmatrix}$$

となるものがある。

4.4 Jordan の標準型

定理 4.4.1. *$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, U* は有限次元 *K-vector space* とする。$f : U \to U$ は *linear* であり $F_f(\lambda) = 0$ の全ての解が K に属するとする。このとき、U の基底でその基底に関する f の表現が $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ と $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ で $n_1 + \dots + n_k = \dim U$ をみたすものに対して、

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 I_2 + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

となるものがある。さらにこのとき、$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ は f の固有値であり、λ を f の固有値とするとき、

$$n(\lambda, f) = \sum_{i : \alpha_i = \lambda} n_i$$

が成り立つ。

証明. $\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ を f の固有値の全体とし、$i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$ とする。4.2 で示したように、$f = f|_{E^*_{\lambda_1}(f)} \oplus \cdots \oplus f|_{E^*_{\lambda_m}(f)}$ であり、各 $i = 1,\dots,m$ に対してべき零な $f_i^N : E^*_{\lambda_i}(f) \to E^*_{\lambda_i}(f)$ があって、$f|_{E^*_{\lambda_m}(f)} = \lambda_i I + f_i^N$ となる。ここで、$V = E^*_{\lambda_i}(f)$, $g = f_i^N$ として定理 4.3.4 を用いると、$E^*_{\lambda_i}(f)$ の基底 $(e_{i,1},\dots,e_{i,l_i})$ でその基底に関して $f|_{E^*_{\lambda_i}(f)}$ を表現する行列が

$$\lambda_i I + \begin{pmatrix} J_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{m_k} \end{pmatrix}$$

となるものが存在する。ここで U の基底として $(e_{11},\dots,e_{1l_1},\dots,e_{m1},\dots,e_{ml_m})$ をとるとこの基底に関して f を表現する行列は、(4.1) の形になる。 □

例 4.4.2 (3 行 3 列の行列の Jardan 標準型).
A を 3 行 3 列の行列とする。そのの固有多項式 $|A - \lambda I| = 0$ の解を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とする。また

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく。
(a) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が全て異なるとき：
このとき、A は対角化可能。すなわち、固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に属する固有ベクトルをそれぞれ g_1, g_2, g_3 とすると、K^3 の基底 (g_1, g_2, g_3) に関する A の表現行列は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3. \end{pmatrix}$$

(b) $\lambda_1 = \lambda_2$ が固有多項式の重解で $\lambda_1 \neq \lambda_3$ の時
(b-1) 固有値 λ_1 の固有空間が 2 次元の時：
e_1, e_2 を固有値 λ_1 に属する固有ベクトルで (g_1, g_2) は 1 次独立なものとする。g_3 を固有値 λ_3 に属する固有ベクトルとする。このとき (g_1, g_2, g_3) は K^3 の基底であり、この基底に関して A を表現する行列は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3. \end{pmatrix}$$

このとき A は対角化可能である。

(b-2) λ_1 の固有空間が 1 次元のとき：
$n(\lambda_1, A) = 2$ であるから $\dim E^*_{\lambda_1}(A) = 2$ であり、$\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) = 1$ かつ $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) \subsetneq \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$ なので、$E^*_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$. 従って、

$$(A - \lambda_1 I)p \neq 0$$
$$(A - \lambda_1 I)^2 p = 0$$

となる p が存在する。このとき $q = (A - \lambda_1)p$ とおくと、

$$Aq = A(A - \lambda_1 I)p = \lambda_1(A - \lambda_1 I)p = \lambda_1 q$$

すなわち q は固有値 λ_1 に属する固有ベクトルである。ここで、(q, p) は 1 次独立。ここで g_3 を固有値 λ_3 に属する固有ベクトルとし、$g_1 = q, g_2 = p$ とするとき (g_1, g_2, g_3) に関して A を表現する行列は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

また、(e_1, e_2, e_3) から (g_1, g_2, g_3) への基底変換の行列は $P = (g_1\ g_2\ g_3)$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ のとき（$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ とおく）
(c-1) 固有値 λ の固有空間が 3 次元の時：

$$A = \lambda I.$$

(c-2) 固有値 λ の固有空間の次元が 2 次元の時：
$\dim Ker(A - \lambda I) = 2 < \dim E^*_\lambda(f) = 3$ より $m(A - \lambda I) = 2$ である。すなわち $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \subsetneq \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^2 = K^3$. 従って、

$$(A - \lambda I)p \neq 0 \quad \text{かつ} \quad (A - \lambda I)^2 p = 0$$

となる p がとれる。$q = (A - \lambda I)p$ とするとき、$Aq = \lambda q$. $\dim E_\lambda(f) = 2$ なので (q, u) が 1 次独立となるように $u \in E_\lambda(f)$ がとれる。ここで $g_1 = q, g_2 =$

$p, g_3 = u$ とするとき、$(A-\lambda I)q = 0, (A-\lambda I)g_2 = g_1, (A-\lambda I)g_3 = 0$ なので、A を基底 (g_1, g_2, g_3) に関して表現する行列は

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(c-3) 固有値 λ の固有空間の次元が 1 の時：
$\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2 = K^3$ とする。$\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda I) = 1$ であるので、$a_1 \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ として (a_1, a_2, a_3) が 1 次独立となるように a_2, a_3 を選ぶことができる。$\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda I) = 1$ であるので、$a_2, a_3 \notin \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ である。$(A-\lambda I)a_2, (A-\lambda I)a_3 \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ となるので、ある $\alpha, \beta \in K$ で $(A-\lambda I)a_3 = \alpha a_1, (A-\lambda I)a_3 = \beta a_1$ となる。これより $(A-\lambda I)(\beta a_2 - \alpha a_3) = 0$. 従ってある $\gamma \in K$ に対して $\beta a_2 - \alpha a_3 = \gamma a_1$. (a_1, a_2, a_3) は 1 次独立なので $\alpha = \beta = \gamma = 0$. よって $a_2, a_3 \in \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ となり矛盾。この議論により

$$\mathrm{Ker}(A-\lambda I) \subsetneq \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2 \subsetneq \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^3 = K^3$$

これより

$$(A-\lambda I)^2 g_3 \neq 0$$

を満たす $g_3 \neq 0$ が存在する。$g_2 = (A-\lambda I)g_3, g_1 = (A-\lambda I)g_2$ とおけば、(g_1, g_2, g_3) は K^3 の基底であり、この基底に関して A を表現する行列は

$$Ag_3 = \lambda g_3 + g_2, Ag_2 = \lambda g_2 + g_1, Ag_1 = \lambda g_1$$

より

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

例 4.4.3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$|A-\lambda I| = -(\lambda-1)^3.$$

よって、(c) の場合。ここで、固有値 1 の固有空間は

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

より、

$$s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

よって固有空間の次元は 1. よって (c-3) の場合になる。このとき、

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}-2&1&-2\\-4&2&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(A-I)^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって、

$$g_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \ g_2=(A-I)g_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \ g_1=(A-I)^2g_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

このとき $P=(g_1\ g_2\ g_3)$ とすると

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\-2&1&2\end{pmatrix}.$$

であり

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Chapter 5

行列の指数関数と線型常微分方程式

$x:\mathbb{R}\to K^n$ とする。すなわち $x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}$ である。$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(K)$, $u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}\in K^n$ に対して x が線型常微分方程式（Ordinary Differential Equation）

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{5.1}$$

の初期値

$$\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}$$

を持つ解であるとは、任意の $i=1,\ldots,n$ に対して $x_n(t)$ が $\mathbb{R}$ 上微分可能であり、任意の $t\in\mathbb{R}$ で、(5.1) をみたし、さらに

$$x(0)=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots \\ u_n\end{pmatrix}$$

がみたされることである。

A が対角化可能であるとき、P を A を対角化する正則な行列とする。す

なわちある $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ に対して、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が成り立つとする。このとき $y(t) = P^{-1}x(t)$ とおけば、

$$\frac{dy}{dt} = P\frac{dx}{dt} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy$$

が成り立つ。すなわち、

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i$$

であり、$v = P^{-1}u$ とおくと、$y(0) = v$ であるので、

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$$

すなわち、

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}u$$

よって

$$x(t) = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}u$$

が成り立つ。さて、いま

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とおくとき、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kD^k}{k!}\\
=&\begin{pmatrix}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & 0 & \dots & 0\\
0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \dots & 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_n t)^k}{k!}
\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}
e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0\\
0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}\\
=&(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(PDP^{-1})^k}{k!})\\
=&P(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kD^k}{k!})P^{-1}\\
=&P\begin{pmatrix}
e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0\\
0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t}
\end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}
$$

よって行列の無限和 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}$ は収束する。ここで

$$
e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}
$$

と定義するとき、

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

が成り立ち、線型常微分方程式 (5.1) の初期値 u の解は、

$$x(t) = e^{tA} u$$

で与えられる。

一般の場合、すなわち A 対角化可能でないとき、A の Jordan 標準型が、正則な行列 P を用いて、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

と表される時を考える。対角化可能の場合と同様に $y = P^{-1}x$ とおくと、微分方程式 (5.1) は

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix} y \tag{5.3}$$

となる。ここで、簡単のために $z : \mathbb{R} \to K^m$ が

$$\frac{dz}{dt} = (\lambda I_m + J_m) z \tag{5.4}$$

をみたす場合を考える。このとき

$$\frac{dz_m}{dt} = \lambda z_m$$

より

$$z_m(t) = e^{\lambda t} z_m(0).$$

$k = 1, \dots, m-1$ では

$$\frac{dz_k}{dt} = \lambda z_k + z_{k+1}$$

より、

$$\frac{d(e^{-\lambda t} z_k)}{dt} = e^{-\lambda t}\frac{dz_k}{dt} - \lambda e^{-\lambda t} z_k = e^{-\lambda t} z_{k+1}$$

従って

$$e^{-\lambda t} z_k(t) - z_k(0) = \int_0^t e^{-\lambda s} z_{k+1}(s) ds$$

これより

$$z_k(t) = e^{\lambda t} z_k(0) + e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda s} z_{k+1}(s) ds$$

となり、

$$\begin{aligned}
z_{m-1}(t) &= e^{\lambda t} z_{m-1}(0) + t e^{\lambda t} z_m(0) \\
z_{m-2}(t) &= e^{\lambda t} z_{m-2}(0) + t e^{\lambda t} z_{m-1}(0) + \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} z_m(0) \\
&\vdots \\
z_1(t) &= e^{\lambda t} z_1(0) + t e^{\lambda t} z_2(0) + \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} z_3(0) + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda t} z_m(0)
\end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、

$$z(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z(0)$$

ここで、$(J_m)^m = 0$ より、$I = I_m, J = J_m$ とおくと

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k(\lambda I + J)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N}\frac{t^k\sum_{r=0}^{k}{}_kC_r\lambda^{k-r}J^r}{k!} = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{k=r}^{N}\frac{{}_kC_r\lambda^{k-r}t^k}{k!}J^r$$
$$= \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{k=r}^{N}\frac{(\lambda t)^{k-r}}{(k-r)!}\frac{t^r}{r!}J^r = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{N-r}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\frac{t^r}{r!}J^r$$

以上より

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(\lambda I+J)^k}{k!}=e^{\lambda t}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{t^r}{r!}J^r=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}\\ 0 & \dots & 0 & 1 & t\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

よって

$$e^{t(\lambda I+J)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(\lambda I+J)^k}{k!}$$

と定義するとき、線型常微分方程式 (5.4) の初期値 $z(0)$ の解は

$$z(t)=e^{t(\lambda I+J)}z(0)$$

で与えられる。従って

$$X=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1}+J_{n_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 I_2+J_{n_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{n_k}+J_{n_k}\end{pmatrix}$$

とするとき、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tX)^n}{n!}$ は収束してその極限を e^{tX} と定義するとき、

$$e^{tX}=\begin{pmatrix}e^{t(\lambda_1 I_{n_1}+J_{n_1})} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{t(\lambda_2 I_2+J_{n_2})} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & e^{t(\lambda_k I_{n_k}+J_{n_k})}\end{pmatrix}$$

となり、微分方程式 (5.3) の初期値 $y(0)$ の解は

$$x(t)=e^{tX}x(0)$$

また対角化可能であるときと同じ議論により、$\sum_{n\geq 0}\frac{(tA)^n}{n!}$ は収束して、その極限の行列を e^{tA} と定義するとき、

$$e^{tA}=Pe^{tX}P^{-1}$$

が成り立ち、(5.1) の初期値 $x(0)$ の解は、

$$x(t) = e^{tA}x(0)$$

となる。以上より

定理 5.0.1. $A \in M_n(K)$ とする。このとき $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$ は収束し、A の *Jordan* 標準型を

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix}$$

正則な行列 P に対して $P^{-1}AP = X$ とすると、

$$e^A = P \begin{pmatrix} e^{(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1})} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{(\lambda_2 I_2 + J_{n_2})} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{(\lambda_k I_{n_k} + J_{n_k})} \end{pmatrix} P^{-1}$$

となる。

定理 5.0.2. 微分方程式 (5.1) の初期値 $x(0)$ の解は

$$x(t) = e^{tA}x(0)$$

となる。

例 5.0.3. (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

のとき、A の固有多項式は $-\lambda(\lambda-1)^2$. よって固有値は $\lambda = 0, 1$.
固有値 0 の固有空間は、

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

固有値 1 の固有空間は

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

である。更に、

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

より

$$\mathrm{Ker}(A - I)^2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

よって $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, p_2 = (A - I)p_3 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおき

$$P = (p_1\ p_2\ p_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

従って、

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - e^t + 2te^t & -1 + e^t - te^t & 2 - 2e^t + 3te^t \\ -2 + 2e^t + 4te^t & 1 - 2te^t & -2 + 2e^t + 6te^t \\ -2 + 2e^t & 1 - e^t & -2 + 3e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

のとき、A の固有多項式は $-(\lambda+1)^3$. よって固有値は -1 のみ。固有値 -1 の固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とするとき、

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

より $z=0, x-2y=0$. 従って固有値 -1 に属する固有空間は

$$\left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s \in (0,1) \right\}$$

このとき

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A+I)^3 = 0$$

従って $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = (A+I)p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, p_1 = (A+I)p_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると (p_1, p_2, p_3) は1次独立であり、$P = (p_1\,p_2\,p_3)$ とおくと $Ap_1 = -p_1, Ap_2 = -p_2 + p_1, Ap_3 = -p_3 + p_2$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ここで

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$e^{tA} = e^{-t} P \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = e^{-t} \begin{pmatrix} -t^2 + 2t + 1 & \frac{t^2}{2} - t & -t^2 + 3t \\ -2t^2 & 1 + t^2 & 2t - 2t^2 \\ -2t & t & 1 - 2t \end{pmatrix}$$