線形代数学続論演習 1

1.
$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

で与える。このとき (a_1, a_2, a_3) は $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ。さらに、$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の (a_1, a_2, a_3) に関する座標を求めよ。

2.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とおく。(f_1, f_2, f_3, f_4) は $\mathbb{R}^4$ で 1 次独立か？

3. U を vector space, $f \in L(U)$ とする。ここで $n = 1, 2, \cdots$ に対して、$f^n \in L(U)$ を、$f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n$ で帰納的に定義する。
(1) 任意の $m \geq 1$ で $\mathrm{Im} f^m \supseteq \mathrm{Im} f^{m+1}$ が成り立つことを示せ。さらに、ある n で $\mathrm{Im} f^n = \mathrm{Im} f^{n+1}$ ならば、任意の $m \geq n$ で $\mathrm{Im} f^n = \mathrm{Im} f^m$ となることを示せ。
(2) 任意の $m \geq 1$ で $\ker f^m \subseteq \ker f^{m+1}$ が成り立つことを示せ。さらに、ある n で $\ker f^n = \ker f^{n+1}$ ならば、任意の $m \geq n$ で $\ker f^n = \ker f^m$ となることを示せ。

4. $f \in L(\mathbb{R}^3)$ は、

$$f\Bigl(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\Bigr)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},f\Bigl(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Bigr)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},f\Bigl(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\Bigr)=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$$

とみたす。$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とするとき、f の (e_1,e_2,e_3) に関する表現行列を求めよ。

4. U を vector space, V_1, V_2 を U の部分空間とする。このとき、$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$ となるための必要十分条件は $V_1 \cap V_2=\{0\}$ であることを示せ。

5. U を vector space, $f: U \to U$ を1次変換とする。$f \circ f = f$ が成立するとき、$V=\{x | x \in U, f(x)=x\}$ と定義すれば、$U=\ker f \oplus V$ が成立することを示せ。