線形代数学続論演習 2

1.
A を下の (1), (2) で与えられた 3 行 3 列の行列とするとき、A の Jordan 標準型と $P^{-1}AP$ が A の Jordan 標準型となるような 3 行 3 列の行列を一つ求めよ。

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.
(1) $n \in \mathbb{N}$ とする。n-次元 $\mathbb{C}$-vector space V からそれ自身への線型写像 f が基底 $(g_1, \ldots, g_n)$ に関して行列 J_n で表現されるとする。このとき f を基底 $(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1)$ に関して表現する行列は J_n の転置行列 ${}^t(J_n)$ であることを示せ。
(2) $(Q_n)^{-1} J_n Q_n = {}^t(J_n)$ を満たす n 行 n 列の行列 Q_n を求めよ。
(3) $m \in \mathbb{N}$ に対して A を m 行 m 列の行列とする。A の Joardan 標準型は $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ で $n_1 + \ldots + n_k = m$ を満たすものと m 行 m 列の正則な行列 P に対して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 I_2 + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix}$$

で与えられるとする。このとき

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Q_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & Q_{n_k} \end{pmatrix}$$

に対して $Q^{-1}P^{-1}APQ$ を求めよ。
(4) n 行 n 列の行列 A とその転置行列 ${}^tA$ の Jordan 標準型は一致することを示せ。
ヒント：${}^t(Q^{-1}P^{-1}APQ) = {}^t(PQ) {}^tA\, {}^t(PQ)^{-1}$

解答

1-(1)

A の固有多項式は $-\lambda(\lambda-1)^2$. よって固有値は $\lambda=0,1$.
固有値 0 の固有空間は、

$$\left\{ t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}.$$

固有値 1 の固有空間は

$$\left\{ t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}.$$

である。更に、

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-2&1&-2\\-2&1&-2\end{pmatrix}$$

より

$$\mathrm{Ker}(A-I)^2=\left\{ t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \middle| t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

よって $p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, p_2=(A-I)p_3=-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ とおき $P=(p_1\ p_2\ p_3)$ とすると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1-(2)

A の固有多項式は $-(\lambda+1)^3$. よって固有値は $\lambda=-1$.
$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を固有値 -1 に属する固有ベクトルとすると、

$$\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&-2&6\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

よって $2x-y+3z=0$. これより固有値 -1 の固有空間は

$$\left\{ s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}\middle| s,y\in\mathbb{R}\right\}$$

となりその次元は 2. 従って $\mathrm{Ker}(A+I)^2=\mathbb{R}^3$ となる。ここで $p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, p_1=(A+I)p_1=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$ とおくと (p_1,p_2,p_3) は 1 次独立であり、

$$Ap_1=-p_1+p_2, Ap_2=-p_2, Ap_3=-p_3$$

従って $P=(p_1\,p_2\,p_3)$ とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

1-(3) A の固有多項式は $-\lambda^3$. よって固有値は 0 のみ。固有値 0 の固有ベクトルを $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とするとき、

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

より $z=0, x-2y=0$. 従って固有値 0 に属する固有空間は

$$\left\{ s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\middle| s\in(0,1)\right\}$$

このとき

$$A^2=\begin{pmatrix}-2&1&2\\-4&2&-4\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A^3=0$$

従って $p_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $p_2 = Ap_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $p_1 = Ap_2 = \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}$ とすると (p_1, p_2, p_3) は１次独立であり、$P = (p_1\, p_2\, p_3)$ とおくと $Ap_1 = 0, Ap_2 = p_1, Ap_3 = p_2$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$