線型代数学 B 演習 1 略解

演習 1. $A := \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ は $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，行列式 $|A|$ は 1 であるから，逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}{}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

演習 2. (1) F を基底 $(1, x, x^2)$ に関して表現する行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$．これを A とおく．

(2) 基底 $(1, x, x^2)$ から基底 $(1+x, 1-x, x^2)$ への基底変換の行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$．これを P とおく．

(3) 行列 P の逆行列 P^{-1} は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから，F を基底 $(1+x, 1-x, x^2)$ に関して表現する行列 B は

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

演習 3. (1) $A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．行列 A の固有多項式 $F_A(\lambda)$ は

$$F_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

であるから，固有方程式を解いて，行列 A の固有値は $-1, 1, 2$．また，固有値 $-1, 1, 2$ に属する固有ベクトルは各々 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ などである．

(2) $B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．行列 B の固有多項式 $F_B(\lambda)$ は

$$F_B(\lambda) = |\lambda I_3 - B| = (\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

であるから，固有方程式を解いて，行列 B の固有値は 1 (2 重解) と 3．また，固有値 1 (2 重解) と 3 に属する固有ベクトルは各々 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ などである．

演習 4. A をべき零行列とする．べき零行列の定義より，ある自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して，$A^m = 0$ が成り立つ．また，$\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値，$x \in \mathbb{C}^n$ を A の固有値 λ に属する固有ベクトルとすると，$A^m x = \lambda^m x$ が成り立つ．したがって，$A^m = 0$ より，$\lambda^m x = 0$．さらに，$x \neq 0$ であるから，$\lambda = 0$ となり，題意が示される．

演習 5. ヒントより, $\mathrm{rank}({}^t A - \lambda I_n) < n$ を示せばよい．実際, $\mathrm{rank}({}^t A - \lambda I_n) = \mathrm{rank}({}^t(A - \lambda I_n)) = \mathrm{rank}(A - \lambda I_n) < n$ となり，題意が示される．