線型代数学 B 演習 2 略解

1. $A := \begin{pmatrix} -1 & -4 & 8 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．行列 A の固有多項式 $F_A(\lambda)$ は

$$F_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2$$

となるから，行列 A の固有値は $\lambda = 3, 1$ (重複度 2)．固有値 $\lambda = 1$ (重複度 2) に対する固有空間 $V_A(1)$ は

$$V_A(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

となるから，$V_A(1)$ の次元は 1 であり，重複度 2 と等しくない．よって，行列 A は対角化可能でない．

2. 基底 (a_1, a_2, a_3) から $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積に関して Schmidt の直交化法で定まる正規直交基底 (b_1, b_2, b_3) は

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

答えを出した後に，$(b_i, b_j) = \delta_{i,j}$ となっていることを確認すれば，多くの場合計算ミスを防げる．

3. 基底 (a_1, a_2, a_3) から $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積に関して Schmidt の直交化法で定まる正規直交基底 (b_1, b_2, b_3) は

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

基底 (e_1, e_2, e_3) から (b_1, b_2, b_3) への基底変換の行列を求める．$b_j = p_{1j} e_1 + p_{2j} e_2 + p_{3j} e_3$ $(j = 1, 2, 3)$ から定まる行列 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ を求めればよいので，答は $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

4. (1) 任意の $f, g \in T_2(\mathbb{R})$ に対し，(f, g) が実数であることは明らか．あとは，$(\cdot, \cdot)$ が内積の定義 (以下の (i) から (iv)) を満たすことを示せばよい．

(i) $(f, g) = (g, f)$

(ii) $(f + g, h) = (f, g) + (f, h), \quad (f, g + h) = (f, g) + (f, h)$

(iii) $\alpha(f, g) = (\alpha f, g)$

(iv) $(f, f) \geq 0, \quad (f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$

ここで，$f, g, h \in T_2(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}$ である．(i)，(ii)，(iii) は $(\cdot, \cdot)$ の定義から明らか．(iv) のみ示す．$(f, f) \geq 0$ は明らか．$(f, f) = 0$ とする．$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $(a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R})$ とおくと，

$$\int_0^1 f(x)^2 \, dx = \left(a_0 + \frac{a_1 + \frac{2}{3} a_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{12}(a_1 + a_2)^2 + \frac{1}{180} a_2^2$$

と変形でき，$(f,f)=0$ より，$a_0=a_1=a_2=0$ が分かる．よって，$f(x)=0$ となり，(iv) が満たされる．
(2) $T_2(\mathbb{R})$ の基底 $(1,x,x^2)$ から Schmidt の直交化法で定まる正規直交基底 (f_1,f_2,f_3) は

$$f_1(x)=1,\quad f_2(x)=\sqrt{3}(2x-1),\quad f_3(x)=\sqrt{5}(6x^2-6x+1).$$

5. 必要条件であることを示す．すなわち，$(e_1,\dots,e_m)$ が U の正規直交基底であると仮定すると，任意の $u\in U$ に対し，以下の式 (5.1) が成り立つことを示す．$(e_1,\dots,e_m)$ が U の正規直交基底とする．任意に $u\in U$ をとり，$u=u_1e_1+\cdots+u_me_m$ とおく $(u_1,\dots,u_m\in K)$．すると，内積の定義，$(e_1,\dots,e_m)$ の直交性，正規性より，

$$|u|^2=(u,u)=(\sum_{i=1}^m u_ie_i,\sum_{j=1}^m u_je_j)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m u_i\overline{u_j}(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^m u_i\overline{u_i}(e_i,e_i)=\sum_{i=1}^m|u_i|^2$$

が成り立つ．さらに，$(e_1,\dots,e_m)$ の直交性より，任意の $i=1,\dots,m$ に対し，$u_i=(u,e_i)$ が成り立つことから，

$$|u|^2=\sum_{i=1}^m|(u,e_i)|^2 \tag{5.1}$$

を得る．よって，必要条件であることが示された．

十分条件であることを示す．すなわち，任意の $u\in U$ に対し，式 (5.1) が成り立つと仮定すると，$(e_1,\dots,e_m)$ が U の正規直交基底となることを示す．任意の $u\in U$ に対し，式 (5.1) が成り立つと仮定する．まず，式 (5.1) と $(e_1,\dots,e_m)$ の直交性より，任意の $j=1,\dots,m$ に対し，

$$|e_j|^2=\sum_{i=1}^m|(e_j,e_i)|^2=|(e_j,e_j)|^2=|e_j|^4$$

が成り立ち，$e_j\neq 0$ より，$|e_j|=1$ が分かる．次に，$(e_1,\dots,e_m)$ が一次独立であることを示す．$\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_me_m=0$ とする $(\alpha_1,\dots,\alpha_m\in K)$．すると，内積の定義と $(e_1,\dots,e_m)$ の直交性より，任意の $i=1,\dots,m$ に対し，

$$\alpha_i(e_i,e_i)=(\alpha_ie_i,e_i)=(-(\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_{i-1}e_{i-1}+\alpha_{i+1}e_{i+1}+\cdots+\alpha_me_m),e_i)=0$$

が成り立つ．$e_i\neq 0$ であるから，$(e_i,e_i)>0$．よって，$\alpha_i=0$ となり，$(e_1,\dots,e_m)$ が一次独立であることが示される．最後に，U の任意の元が $(e_1,\dots,e_m)$ の一次結合で表されることを示す．任意に $u\in U$ をとり，

$$\tilde{u}=u-\sum_{i=1}^m(u,e_i)e_i$$

とおく．すると，内積の定義，$(e_1,\dots,e_m)$ の直交性，式 (5.1) より，

$$\begin{aligned}|\tilde{u}|^2&=(\tilde{u},\tilde{u})\\&=(u,u)-2\sum_{i=1}^m(u,e_i)\overline{(u,e_i)}+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m(u,e_i)\overline{(u,e_j)}(e_i,e_j)\\&=(u,u)-\sum_{i=1}^m(u,e_i)\overline{(u,e_i)}\\&=0\end{aligned}$$

が成り立ち，$\tilde{u}=0$ が分かる．したがって，$u=\sum_{i=1}^m(u,e_i)e_i$ となり，U の任意の元が $(e_1,\dots,e_m)$ の一次結合で表されることが示される．よって，$(e_1,\dots,e_m)$ は U の正規直交基底となり，十分条件であることが示された．