微分方程式

木上　淳
京都大学大学院情報学研究科
e-mail：kigami@i.kyoto-u.ac.jp

December 28, 2018

Contents

Chapter 1

線形常微分方程式

線型常微分方程式とは、(2.1.6) で $f(t,x)$ が x に関して線型である場合をいう。すなわち t に依存した $n\times n$ の行列 $A(t)$ があって、$X:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ が

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X \tag{1.0.1}$$

と書ける場合 X は (a,b) 上での線型常微分方程式 (1.0.1) の解であるという。A が t に関して連続である場合（$A(t)$ の各成分が t に関して連続である場合）$A(t)X$ は $\mathbb{R}^n$ に関して compact 一様リプシッツである。

例 1.0.1. $n=1$ のとき、線型常微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=f(t)x$$

の $t=0$ で初期値 x_0 をとる解は

$$x(t)=e^{F(t)}x_0,$$

ただし $F(t)=\int_0^t f(s)ds.$

例 1.0.2.

$$\frac{dx}{dt}=f(t)x+g(t)y$$
$$\frac{dy}{dt}=h(t)y$$

の解は、

$$F(t)=\int_0^t f(s)ds, H(t)=\int_0^t h(s)ds$$

とおくとき、

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{F(t)}x_0 + \left(e^{F(t)}\int_0^t g(s)e^{H(s)-F(s)}ds\right)y_0 \\
y(t) &= e^{H(t)}y_0
\end{aligned}
$$

§1.1　ノルム空間

以下では $K=\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする。

定義 1.1.1 (ノルム)**.** V を K-ベクトル空間とする。$u\in V$ に対して実数 $||u||$ を対応させる $||\cdot||$ が V のノルム（norm）であるとは、
(N1) 任意の $v\in V$ に対して $||u||\geq 0.$ さらに $||v||=0 \Leftrightarrow v=0.$
(N2) 任意の $\lambda\in K$ と $v\in V$ に対して $||\lambda v||=|\lambda|||v||.$
(N3) 任意の $u,v\in V$ に対して $||u+v||\leq ||u||+||v||.$
が成り立つことである。さらに V 上の 2 つのノルム $||\cdot||_1$ と $||\cdot||_2$ が同値であるとは、ある定数 $c_1,c_2>0$ があって任意の $v\in V$ に対して

$$c_1||v||_1\leq ||v||_2\leq c_2||v||_1$$

が成り立つことである。

命題 1.1.2. V を K-ベクトル空間とし、$||\cdot||$ をそのノルムとする。このとき、$u,v\in V$ に対して $d(u,v)=||u-v||$ と定義すると $d(\cdot,\cdot)$ は V 上の距離になる。V 上に 2 つの同値なノルム $||\cdot||_1$ と $||\cdot||_2$ があるとき、$d_i(v,u)=||v-u||_i$ と定義すると、2 つの距離 $d_1(\cdot,\cdot)$ と $d_2(\cdot,\cdot)$ は同値である。すなわちある $c_1,c_2>0$ があって任意の $u,v\in V$ に対して

$$c_1d_1(u,v)\leq d_2(u,v)\leq c_2d_1(u,v)$$

が成り立つ。

$d(\cdot,\cdot)$ をノルム $||\cdot||$ に付随する V 上の距離、$d(\cdot,\cdot)$ から決まる V の位相を $||\cdot||$ に付随する V の位相という。

定義 1.1.3. V を K-ベクトル空間、$||\cdot||$ をそのノルムとする。V が $||\cdot||$ に付随する距離に関して完備なとき、$(V,||\cdot||)$ を バナッハ空間（Banach space）という。

例 1.1.4. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$|x|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

と定義する。このとき $|\cdot|_1, |\cdot_2|, |\cdot_3$ は $\mathbb{R}^n$ のノルムであり互いに同値になる。実際、

$$|x|_\infty \le |x|_2 \le |x|_1 \le n|x|_\infty$$

が成り立つ。さらに $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ は Banach 空間である。

実は $\mathbb{R}^n$ のノルムについてはより一般に次の命題が成り立つ。

命題 1.1.5. $||\cdot||$ を $\mathbb{R}^n$ のノルムとするとき、$||\cdot||$ は $|\cdot|_2$ と同値である。

証明. $i = 1, \dots, n$ に対して $e_i \in \mathbb{R}^n$ を i 番目の座標が 1 でそれ以外の座標は 0 であるベクトルとする。$M = \max_{i=1,\dots,n} ||e_i||$ とおくと、$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ より

$$||x|| = ||\sum_{i=1}^{n} x_i e_i|| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| ||e_i|| \le M|x|_1$$

いま $|\cdot|_1$ は $|\cdot|_2$ と同値であるから、ある定数 $C_1 > 0$ があって任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $||x|| \le C_1 |x|_2$ が成り立つ。あとは

$$\text{ある } C_2 > 0 \text{ があって任意の } x \in \mathbb{R}^n \text{ で } C_2|x|_2 \le ||x|| \tag{1.1.1}$$

を示せば命題の証明は完了する。背理法を用いて (1.1.1) を示す。すなわちある $\{x_m\}_{m\ge1} \subset \mathbb{R}^n$ があって、$m \to \infty$ で $\dfrac{||x_m||}{|x_m|_2} \to 0$ と仮定する。ここで $y_m = \dfrac{x_m}{|x_m|_2}$ とおけば、$|y_m|_2 = 1$ であり、$m \to \infty$ で $||y_m|| = \dfrac{||x_m||}{|x_m|_2} \to 0.$ いま $\{y_m\}_{m\ge1}$ は有界な点列なので適当な部分列 $\{z_k\}_{k\ge1}$ と $z \in \mathbb{R}^n$ があって $m \to \infty$ で $|z_m - z|_2 \to 0.$ このとき $|z|_2 = 1$ である。さて

$$|||z_m|| - ||z||| \le ||z_m - z|| \le C_1 |z_m - z|_2$$

である。よって $||z|| = \lim_{m\to\infty} ||z_m|| = 0.$ 従って $z = 0.$ これは $|z|_2 = 1$ に矛盾する。従って (1.1.1) は示された。 □

例 1.1.6. (X, d) を完備な距離空間、$C_b(X, d) = \{f | f : X \to \mathbb{R}, f$ は X 上連続$\}$ とする。$f \in C_b(X, d)$ に対して、

$$|f|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

とおくとき、$|\cdot|_b$ は $C(X, d)$ のノルムである。

定理 1.1.7. V を K-ベクトル空間、$||\cdot||$ をそのノルムとする。さらに $A : V \to V$ を線型写像とする。このとき次の 2 つは同値である。
(L1)　A は $||\cdot||$ に付随する位相に関して V 上連続.
(L2)

$$\sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{||Av||}{||v||} < +\infty.$$

証明. (L1) $\Rightarrow$ (L2):　対偶を示す。(L2) を否定すると、ある $\{x_m\}_{m \geq 1} \subset V$ で $m \to \infty$ で $\frac{||Ax_m||}{||x_m||} \to \infty$ と成るものがある。$y_m = \frac{x_n}{\sqrt{||x_m||||Ax_m||}}$ とおくと、$m \to \infty$ で

$$||y_m|| = \sqrt{\frac{||x_m||}{||Ax_m||}} \to 0, ||Ay_m|| = \sqrt{\frac{||Ax_m||}{||x_m||}} \to \infty$$

よって A は 0 で連続でない。
(L2) $\Rightarrow$ (L1):　$C = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{||Av||}{||v||}$ とおく。$x \in V$、$m \to \infty$ で $x_m \to x$ とする。このとき $||Ax_m - Ax|| = ||A(x_m - x)|| \leq C||x_m - x||$ より $m \to \infty$ で $Ax_m \to Ax$. よって A は V 上連続である。 □

定義 1.1.8. V を K-ベクトル空間、$||\cdot||$ をそのノルムとする。定理 1.1.7 の (L2) の条件を満たす線型写像 $A : V \to V$ を V から V への有界線型写像（bounded linear operator）という。さらに、

$$L(V) = \{A | A \text{ は } V \text{ から } V \text{ への有界線型写像}\}$$

とおき、$A \in L(V)$ に対して

$$||A||_{L(V)} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{||Av||}{||v||}$$

と定義する。$||\cdot||_{L(V)}$ を $||\cdot||$ に関する $L(V)$ の作用素ノルム（operator norm）という。

命題 1.1.9. V を K-ベクトル空間、$||\cdot||$ をそのノルムとする。$L(V)$ は線型写像の自然な和と定数倍に関して K-ベクトル空間となり、$||\cdot||_{L(V)}$ は $L(V)$ のノルムであり、$A, B \in L(V)$ に対して、

$$||AB||_{L(V)} \leq ||A||_{L(V)}||B||_{L(V)}$$

が成り立つ。さらに $(V, ||\cdot||)$ が *Banach* 空間ならば $(L(V), ||\cdot||_{L(V)})$ も *Banach* 空間である。

証明. (N1): $A \in L(V)$ とする。$||A||_{L(V)} = 0$ なら任意の $v \in V$ に対して $Av = 0$. よって $A = 0$.
(N2): $A \in L(V)$, $\lambda \in K$ とするとき $||\lambda Ax|| = |\lambda|||Ax||$ より $||\lambda A||_{L(V)} = |\lambda|||A||_{L(V)}$.
(N3): $A, B \in L(V)$ とする。このとき $||(A+B)v|| = ||Av + Bv|| \leq ||Av|| + ||Bv||$. これより $||A+B||_{L(V)} \leq ||A||_{L(V)} + ||B||_{L(V)}$.

以上より $||\cdot||_{L(V)}$ は $L(V)$ のノルムである。$A, B \in L(V)$ とするとき、$Bv \neq 0$ ならば

$$\frac{||ABv||}{||v||} = \frac{||ABv||}{||Bv||}\frac{||Bv||}{||v||}$$

したがって $||AB||_{L(V)} \leq ||A||_{L(V)}||B||_{L(V)}$.

つぎに $(V, ||\cdot||)$ を Banach 空間とし、$\{A_m\}_{m\geq 1} \subset L(V)$ を Cauchy 列とする。すなわち任意の $\epsilon > 0$ に対してある $M_\epsilon > 0$ があって $n, m \geq M_\epsilon$ なら $||A_n - A_m||_{L(V)} < \epsilon$ が成り立つ。$v \in V$ に対して、$n, m \geq M_\epsilon$ なら

$$||A_n v - A_m v|| = ||(A_n - A_m)v|| \leq ||A_n - A_m||_{L(V)}||v|| \leq \epsilon||v||. \tag{1.1.2}$$

よって $\{A_m v\}_{m\geq 1}$ は V の Cauchy 列となり V は Banach 空間より $m \to \infty$ で極限を持つ。その極限を Av と定義するとき、$A : V \to V$ は線型である。(1.1.2) で $m \to \infty$ とすると、$n \geq M_\epsilon$ ならば $||A_n v - Av|| \leq \epsilon||v||$. すなわち $n \geq M_\epsilon$ ならば $||A_n - A||_{L(V)} \leq \epsilon$. よって $n \to \infty$ で $A_n \to A$. つまり $(L(V), ||\cdot||_{L(V)})$ は Banach 空間である。 □

例 1.1.10. $L(\mathbb{R}^n) = M_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$, ただし $M_{m,n}(\mathbb{R})$ は $m \times n$ 実行列の全体とする。ここで $\mathbb{R}^n$ のノルム $|\cdot|_2$ に関する $L(\mathbb{R}^n)$ の作用素ノルムを $||\cdot||_2$ で表す。すなわち $||A||_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \dfrac{|Ax|_2}{|x|_2}$. このとき $||\cdot||_2$ は $L(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n^2}$ のノルムである。命題 1.1.5 より $||\cdot||_2$ と $\mathbb{R}^{n^2}$ のノルム $|\cdot|_2$ は同値である。とくに $(L(\mathbb{R}^n), ||\cdot||_2)$ は Banach 空間である。

§1.2 作用素の指数関数

前の節と同様に $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$ とし、V は K-ベクトル空間とする。

補題 1.2.1. $(V,||\cdot||)$ を *Banach* 空間とする。いま、$\{x_n\}_{n\geq 1}\subseteq V$ に対して、$\sum_{n\geq 1}||x_n||<+\infty$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}x_n$ は $n\to\infty$ で収束する。

定義 1.2.2. $(V,||\cdot||)$ をノルム空間とする。$\{x_n\}_{n\geq 1}\subset V$ とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}x_n$ が $n\to\infty$ で収束するときその極限を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ あるいは $\displaystyle\sum_{n\geq 1}x_n$ と書く。

補題 *1.2.1* の証明. $y_N=\sum_{n=1}^{N}x_n$ とおくとき、$||y_{N+m}-y_N||\leq\sum_{n=N+1}^{N+m}||x_n||$. いま $\sum_{n=1}^{\infty}||x_n||<+\infty$ より、任意の $\epsilon>0$ に対して N が十分大きいならば $\sum_{n=N}^{N+m}||x_n||\leq\sum_{n\geq N}||x_n||<\epsilon$. 従って $||y_{N+m}-y_N||<\epsilon$ となり、$\{y_n\}_{n\geq 0}$ は V の Cauchy 列である。$(V,||\cdot||)$ は Banack 空間なのである $y\in V$ で $n\to\infty$ で $y_n\to y$. □

命題 1.2.3. $(V,||\cdot||)$ を *Banach* 空間とし、$A\in L(V)$ とする。このとき、

$$\sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{n!}$$

は収束する。その極限を e^A と書くことにするとき、$A,B\in L(V)$ に対して $AB=BA$ ならば

$$e^{A+B}=e^Ae^B$$

が成り立つ。

証明. $||A^n/n!||_{L(V)}\leq(||A||_{L(V)})^n/n!$ である。いま $a=||A||_{L(V)}$ とすると $\sum_{n=0}^{\infty}a^n/n!$ は収束する。従って補題 1.2.1 より $\sum_{n\geq 0}A^n/n!$ は収束する。次に $A,B\in L(V)$ で $AB=BA$ とする。$U_N=\{(n,m)|n,m\in\{0,1,\ldots,N\},n+m\geq N+1\}$ とおくと、

$$\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{N}\frac{B^m}{m!}\right)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{A^nB^m}{n!m!}$$
$$=\sum_{k=0}^{N}\sum_{r=0}^{k}\frac{A^{k-r}B^r}{(k-r)!r!}+\sum_{(n,m)\in U_N}\frac{A^nB^m}{n!m!}=\sum_{k=0}^{N}\frac{(A+B)^k}{k!}+\sum_{(n,m)\in U_N}\frac{A^nB^m}{n!m!}. \tag{1.2.1}$$

ここで $\alpha = ||A||_{L(V)}, \beta = ||B||_{L(V)}$ とおけば

$$\begin{aligned}\Bigg|\Bigg|\sum_{(n,m)\in U_N}\frac{A^nB^m}{n!m!}\Bigg|\Bigg|_{L(V)} &\leq \sum_{(n,m)\in U_N}\frac{\alpha^n\beta^m}{n!m!} \\ &\leq \sum_{k\geq N+1}\frac{(\alpha+\beta)^k}{k!} = e^{\alpha+\beta} - \sum_{k=0}^{N}\frac{(\alpha+\beta)^k}{k!}\end{aligned}$$

よって $N\to\infty$ で $\sum_{(n,m)\in U_N}\frac{A^nB^m}{n!m!}\to 0$ である。これより、(1.2.1) で $N\to\infty$ とすれば、$e^Ae^B = e^{A+B}$. □

定義 1.2.4. $(V, ||\cdot||)$ をノルム空間とする。$a, b\in\mathbb{R}$ で $a<b$ とし、$f:(a,b)\to V$ とする。f が $\alpha\in(a,b)$ で微分可能であるとは、ある $v\in V$ に対して、

$$\lim_{h\to 0}\Bigg|\Bigg|\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} - v\Bigg|\Bigg| = 0$$

となることである。$v = \dfrac{df}{dt}(\alpha)$ とかき、f の α での微分と呼ぶ。

命題 1.2.5. $(V, ||\cdot||)$ を *Banach* 空間とする。$A\in L(V)$ とし $t\in\mathbb{R}$ に対して $U(t) = e^{tA}$ とする。このとき任意の $t\in\mathbb{R}$ において $U(t)$ は微分可能であり $\dfrac{dU}{dt} = AU(t) = U(t)A$ が成り立つ。

証明.

$$\begin{aligned}\frac{U(t+h)-U(t)}{h} = \frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h} &= e^{tA}\frac{e^{hA}-I}{h} = e^{tA}\Big(A + h\sum_{n\geq 2}h^{n-2}\frac{A^n}{n!}\Big) \\ &= \frac{e^{hA}-I}{h}e^{tA} = \Big(A + h\sum_{n\geq 2}h^{n-2}\frac{A^n}{n!}\Big)e^{tA}\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

いま $B(h) = \displaystyle\sum_{n\geq 2}h^{n-2}\frac{A^n}{n!}$ とおけば、$|h|\leq 1$ なら

$$||B(h)||_{L(V)} \leq \sum_{n\geq 2}|h|^{n-2}\frac{(||A||_{L(V)})^n}{n!} \leq e^{||A||_{L(V)}}.$$

従って (1.2.2) で $h\to 0$ とすれば $\dfrac{dU}{dt} = AU(t) = U(t)A.$ □

§1.3 自励系線型常微分方程式

自励系の線型常微分方程式は一般に $A \in M_{n,n}(K)$ を用いて、

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1.3.1}$$

と表される。ただし $K = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ とする。この微分方程式の解は前の節の結果により次のように表される。

定理 1.3.1. (1.3.1) の $t = 0$ で初期値 $x_0 \in K^n$ を取る解は、

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

で与えられる。

e^{tA} を具体的に計算するには Jordan の標準形を用いる。

定義 1.3.2. $k \in \mathbb{N}$ に対して、$I_k, J_k \in M_{k,k}(\mathbb{C})$ を I_k は単位行列、

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 1.3.3 (Jordan の標準形). $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ とする。このとき、ある $P \in M_{n,n}(\mathbb{C})$、$n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, A の固有値 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, が存在して P は正則、$n_1 + \dots + n_m = n$ であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 I_{n_2} + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_m I_{n_m} + J_{n_m} \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

が成り立つ。すなわち、$\mathbb{C}^n$ の基底 $(\varphi_1^1, \dots, \varphi_{n_1}^1, \varphi_1^2, \dots, \varphi_{n_2}^2, \dots, \varphi_1^m, \dots, \varphi_{n_m}^m)$ があって、任意の $k = 1, \dots, m$ で

$$A\varphi_i^k = \begin{cases} \lambda\varphi_i^k & i = 1, \\ \lambda\varphi_i^k + \varphi_{i-1}^k & i = 2, \dots, n_k \end{cases}$$

定義 1.3.4. 命題 1.3.3 における $P^{-1}AP$ を A の Jordan 標準形、$\alpha_i I_{n_i} + J_{n_i}$ を A の Jordan 細胞（Jordan cell）という。とくに全ての $i = 1, \dots, m$ に対して $n_i = 1$ のとき（すなわち $m = n$ のとき）A は対角化可能（diagonlizable）あるいは半単純（semisimple）であるという。

補題 1.3.5. $P, A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ で P が正則ならば

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$$

補題 1.3.6.

$$e^{tJ_k} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

補題 1.3.5 より

$$e^{tA} = Pe^{tA}P^{-1}$$

である。ここで補題 1.3.6 より

定理 1.3.7. 命題 *1.3.3* の状況のとき、

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t}e^{tJ_{n_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t}e^{tJ_{n_2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\alpha_m t}e^{tJ_{n_m}} \end{pmatrix} P^{-1} \tag{1.3.3}$$

でありさらに、$k = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n_k$ に対して

$$e^{tA}\varphi_i^k = e^{\alpha_k t}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{t^j}{j!}\varphi_{i-j}^k$$

すなわち $B = P^{-1}AP$ とおくと、

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{e^{tA}} & K^n \\ \uparrow{\scriptstyle P} & & \uparrow{\scriptstyle P} \\ K^n & \xrightarrow{e^{tB}} & K^n \end{array} \tag{1.3.4}$$

以上より、次の定理が得られる。

定理 1.3.8. $x(t)$ を (1.3.1) の $(-\infty,\infty)$ における解とするとき、

$$x(t)=e^{tA}x(0)$$

で与えられる。初期値 $x(0)$ が

$$x(0)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_k}a_i^k\varphi_i^k$$

をみたすならば、

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_k}e^{\alpha_k t}\left(\sum_{j=0}^{n_k-i}a_{i+j}^k\frac{t^j}{j!}\right)\varphi_i^k$$

特に A が対角化可能なとき、すなわち $k=1,\dots,m$ で $n_k=1$ のとき、$\psi_k=\varphi_1^k$ とおくとき、

$$x(0)=\sum_{k=1}^{m}a_k\psi_k$$

なら、

$$x(t)=\sum_{k=1}^{m}a_ke^{\alpha_k t}\psi_k$$

$A\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ で固有値 $\lambda\notin\mathbb{R}$ を持つとき。$\lambda=\eta+\sqrt{-1}\omega$ とおく。

補題 1.3.9. $E(\lambda)=\{x|x\in\mathbb{C}^n,$ ある $m\geq 0$ に対して $(A-\lambda I)^m x=0\}$ とおく。このとき、$\varphi\in E(\lambda)$, $e\neq 0$ に対して、$\varphi=f+\sqrt{-1}g$, $f,g\in\mathbb{R}^n$ とすると、f と g は1次独立である。

証明. $\overline{\varphi}=f-\sqrt{-1}g$ とするとき、$\overline{\varphi}\in E(\overline{\lambda})$. いま、$E(\lambda)$ と $E(\overline{\lambda})$ は1次独立なので、φ と $\overline{\varphi}$ は1次独立。いま、$f=(\varphi+\overline{\varphi})/2$, $g=(\varphi-\overline{\varphi})/(2\sqrt{-1})$ より f と g は1次独立。 □

補題 1.3.10. $(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ を固有値 λ の *Jordan* 細胞の基底とする。すなわち、$A\varphi_1=\lambda\varphi_1$, $A\varphi_i=\lambda\varphi_i+\varphi_{i-1}$ $(i=2,\dots,n)$ とする。$\varphi_i=f_i+\sqrt{-1}g_i, f_i,g_i\in\mathbb{R}^n$ とするとき、

$$e^{tA}f_k=e^{\eta t}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{t^j}{j!}(\cos\omega t f_{k-j}-\sin\omega t g_{k-j})$$

$$e^{tA}g_k=e^{\eta t}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{t^j}{j!}(\sin\omega t f_{k-j}+\cos\omega t g_{k-j})$$

証明. Lemma 1.3.6 より、

$$e^{tA}(f_k + \sqrt{-1}g_k) = e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{t^j}{j!}(f_{k-j} + \sqrt{-1}g_{k-j})$$

これを実部と虚部に整理すればよい。 □

例 1.3.11.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

である。また、$a, b \in \mathbb{R}$ に対して、

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

とする。このとき、

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} & 0 \\ 0 & 0 & e^{bt} \end{pmatrix}$$

である。このとき、$A = PBP^{-1}$ とおけば

$$A = \begin{pmatrix} -a+2b+2 & a-b-1 & -2a+2b+3 \\ 2a-2b+4 & b-2 & 2a-2b+6 \\ 2a-2b & -a+b & 3a-2b \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} (-1+2t)e^{at}+2e^{bt} & (1-t)e^{at}-e^{bt} & (-2+3t)e^{at}+2e^{bt} \\ (2+4t)e^{at}-2e^{bt} & -2te^{at}+e^{bt} & (2+6t)e^{at}-2e^{bt} \\ 2e^{at}-2e^{bt} & -e^{at}+e^{bt} & 3e^{at}-2e^{bt} \end{pmatrix}$$

となる。たとえば $a = b = -1$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, e^{tA} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1+2t & -t & 3t \\ -4t & 1-2t & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a=-1, b=2$ のとき

$$A=\begin{pmatrix}7 & -4 & 9\\ -2 & 0 & 0\\ -6 & 3 & -7\end{pmatrix}$$

例 1.3.12. P は例 1.3.11 と同じとする。$\alpha, \eta, \omega \in \mathbb{R}$ に対して、

$$B=\begin{pmatrix}\eta & \omega & 0\\ -\omega & \eta & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

とすると B の固有値は $\eta \pm \sqrt{-1}\omega, \alpha$ であり、$z=\eta+\sqrt{-1}\omega$ とおくと、B の固有値 z の $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への線型写像としての固有空間は

$$\left\{ t(f+\sqrt{-1}g) \,\middle|\, f=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, t\in\mathbb{C} \right\}$$

また $\bar{z}$ の固有空間は

$$\left\{ t(t-\sqrt{-1}g) \,\middle|\, t\in\mathbb{C} \right\}.$$

補題 1.3.10 より、

$$\begin{aligned} e^{tB}f &= e^{\eta t}((\cos\omega t)f-(\sin\omega t)g)\\ e^{tB}g &= e^{\eta t}((\sin\omega t)f+(\cos\omega t)g) \end{aligned}$$

従って、

$$e^{tB}=\begin{pmatrix} e^{\eta t}\cos\omega t & -e^{\eta t}\sin\omega t & 0\\ e^{\eta t}\sin\omega t & e^{\eta t}\cos\omega t & 0\\ 0 & 0 & e^{\alpha t}\end{pmatrix}$$

いま $A=PBP^{-1}$ とする。このとき

$$A=\begin{pmatrix} -\eta-2\omega+2\alpha & \eta+\omega-\alpha & -2\eta-3\omega+2\alpha\\ 2\eta-6\omega-2\alpha & 4\omega+\alpha & 2\eta-10\omega-2\alpha\\ 2\eta-\omega-2\alpha & -\eta+\omega+\alpha & 3\eta-2\omega-2\alpha \end{pmatrix}$$

ここで、$e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$ より、e^{tA} は A の η, ω, α をそれぞれ $e^{\eta t}\cos\omega t, e^{\eta t}\sin\omega t, e^{\alpha t}$ で置き換えたものになる。例えば、$\omega = \eta = \alpha = -1$ のとき、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & -5 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$e^{tA} = e^{-t}\begin{pmatrix} -\cos t + 2\sin t + 2 & \cos t - \sin t - 1 & -2\cos t + 3\sin t + 2 \\ 2\cos t + 6\sin t - 2 & -4\sin t + 1 & 2\cos t + 10\sin t - 2 \\ 2\cos t + \sin t - 1 & -\cos t - \sin t + 1 & 3\cos t + 2\sin t - 2 \end{pmatrix}$$

§1.4　３次元連立線形微分方程式の解法

A を 3 の実行列とし、
$$\frac{dx}{dt} = Ax$$
の初期値 $x(0)$ を持つ解の計算方法について述べる。

　A の固有多項式 $|A - \lambda I| = 0$ の解を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とする。

(a) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が全て異なる。

(a-1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が全て実数のとき：

p_1, p_2, p_3 をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の固有値に属する固有ベクトルとすると、全ての解 $x(t)$ は
$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t}p_1 + \beta e^{\lambda_2 t}p_2 + \gamma e^{\lambda_3 t}p_3$$
の形で書ける。ここで、$P = (p_1\, p_2\, p_3)$ とするとき、
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}x(0).$$

(a-2) λ_1, λ_2 が実数でない時：

$\lambda_1 = \eta + \sqrt{-1}\omega$ $(\eta, \omega \in \mathbb{R})$ とするとき、$\lambda_2 = \eta - \sqrt{-1}\omega$ と書ける。またこのとき λ_3 は実数である。固有値 λ_1 に属する固有ベクトルを $u + \sqrt{-1}v$ $(u, v \in \mathbb{R}^3)$ とするとき、$u - \sqrt{-1}v$ は 固有値 λ_2 に属する固有ベクトルである。すなわち

$$A(u + \sqrt{-1}v) = \lambda_1(u + \sqrt{-1}v)$$
$$A(u - \sqrt{-1}v) = \lambda_2(u - \sqrt{-1}v)$$

補題 1.3.10 より、

$$e^{tA}u = e^{\eta t}((\cos\omega t)u - (\sin\omega t)v)$$
$$e^{tA}v = e^{\eta t}((\sin\omega t)u + (\cos\omega t)v)$$

また、固有値 λ_3 に属する固有ベクトル p として実ベクトルがとれて、

$$e^{tA}p = e^{\lambda_3 t}p$$

となる。 よって、$x(0) = \alpha u + \beta v + \gamma p$ ならば、

$$x(t) = e^{\eta t}(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)u + e^{\eta t}(\beta\cos\omega t - \alpha\sin\omega t)v + e^{\lambda_3 t}p$$

と書ける。$Q = (u\,v\,p)$ とおくと、

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = Q^{-1}x(0).$$

(b) $\lambda_1 = \lambda_2$ が固有多項式の重解で $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ の時
(b-1) 固有値 λ_1 の固有空間が２次元の時：
p_1, p_2 を固有値 λ_1 に属する固有ベクトルで１次独立なものとする。p_3 を固有値 λ_3 に属する固有ベクトルとする。このとき、任意の解は

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t}p_1 + \beta e^{\lambda_1 t}p_2 + \gamma e^{\lambda_3 t}p_3.$$

$t = 0$ とすると $x(0) = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$ なので、$P = (p_1\,p_2\,p_3)$ とおくとき、

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = P^{-1}x(0).$$

(b-2) λ_1 の固有空間が１次元のとき：

$$(A - \lambda_1 I)p \neq 0$$
$$(A - \lambda_1 I)^2 p = 0$$

となる $p \neq 0$ を一つ求める。$p_2 = p$ として、$p_1 = (A - \lambda_1)p_2$ とおくと、

$$(A - \lambda_1 I)p_1 = (A - \lambda_1 I)^2 p_2 = 0$$

より $Ap_1 = \lambda_1 p_1$. すなわち p_2 は固有値 λ_1 に属する固有ベクトルである。ここで、(p_1, p_2) は1次独立。次に p_3 を固有値 λ_3 に属する固有ベクトルとすると、

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_1 p_2 + p_1, Ap_3 = \lambda_3 p_3$$

$P = (p_1\, p_2\, p_3)$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

従って

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

ここで、

$$e^{tA}p_1 = e^{\lambda_1 t}p_1, e^{tA}p_2 = e^{\lambda_1 t}p_2 + te^{\lambda_1 t}p_1, e^{tA}p_3 = e^{\lambda_3 t}p_3$$

つまり $x(0) = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$ なら、

$$e^{tA}x(0) = e^{\lambda_1 t}(\alpha + \beta t)p_1 + \beta e^{\lambda_1 t}p_2 + \gamma e^{\lambda_3 t}p_3.$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}x(0).$$

(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ のとき（$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ とおく）
固有値 λ の固有空間を $E(\lambda) = \{x | x \in \mathbb{R}^3, (A - \lambda I)x = 0\}$ とおくと
(c-1): $\dim E(\lambda) = 3 \Leftrightarrow A - \lambda I = 0 \Leftrightarrow$

$$\text{Jordan 標準型は} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(c-2): $\dim E(\lambda) = 2 \Leftrightarrow A - \lambda I \neq 0, (A - \lambda I)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\text{Jordan 標準型は} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(c-3): $\dim E(\lambda) = 1 \Leftrightarrow A - \lambda I \neq 0, (A - \lambda I)^2 \neq 0, (A - \lambda I)^3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\text{Jordan 標準型は}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

の３つの場合に分かれる。
(c-1) $A = \lambda I$ となるので、$x(t) = e^{\lambda t}x(0)$.
(c-2)

$$(A - \lambda I)p \neq 0$$

となる p をとり、$p_2 = p$ とおく。$p_1 = (A - \lambda I)p_2$ とするとき、$Ap_1 = \lambda p_1$. $\dim E(\lambda) = 2$ なので、$p_3 \in E(\lambda)$ を (p_1, p_3) が１次独立となるように選ぶ。このとき $P = (p_1\, p_2\, p_3)$ とすると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

従って

$$e^{tA} = e^{\lambda t}P\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

つまり (b-2) で $\lambda_1 = \lambda_3$ の場合と同じである。
(c-3)

$$(A - \lambda I)^2 p \neq 0$$

を満たす $p \neq 0$ を一つ選び $p_3 = p$ とする。$p_2 = (A - \lambda I)p_3, p_1 = (A - \lambda I)p_2$ とおけば、$(A - \lambda I)p_1 = (A - \lambda I)^3 p_3 = 0$ より、

$$Ap_1 = \lambda p_1, Ap_2 = \lambda p_2 + p_1, Ap_3 = \lambda p_3 + p_2$$

をみたす。すなわち $P = (p_1\, p_2\, p_3)$ とおくとき、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

よって

$$e^{tA} = e^{\lambda t}P\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

ここで、

$$e^{tA}p_1 = e^{\lambda t}p_1, e^{tA}p_2 = e^{\lambda t}(tp_1 + p_2), e^{tA}p_3 = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2}p_1 + tp_2 + p_3\right)$$

よって、$x(0) = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$ なら

$$x(t) = e^{tA}x(0) = e^{\lambda t}\left(\left(\alpha + \beta t + \gamma\frac{t^2}{2}\right)p_1 + (\beta + \gamma t)p_2 + \gamma p_3\right).$$

例 1.4.1. (1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$|A - \lambda I| = -(\lambda - 1)^3.$$

よって、(c) の場合。ここで、固有値 1 の固有空間は

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

より、

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって固有空間の次元は 1. よって (c-3) の場合になる。このとき、

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって、

$$p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ p_2 = (A - I)p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ p_1 = (A - I)^2 p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

このとき

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

よって、

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1+2t-t^2 & -t+\frac{t^2}{2} & 3t-t^2 \\ -2t^2 & 1+t^2 & 2t-2t^2 \\ -2t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -10 & 5 & -14 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、

$$|A - \lambda I| = -(1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$$

従って固有値は $\lambda_1 = -1+i, \lambda_2 = -1-i, \lambda_3 = 1$. (a-2) の場合になる。$\lambda_1$ に属する固有ベクトルの一つは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-2i \\ -i \end{pmatrix}$$

また、$\lambda_3 = 1$ に属する固有ベクトルの一つは、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおいて、

$$P = (u\, v\, p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

§1.5　自励系線型常微分方程式の解の安定性

$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする。自励系常微分方程式 (1.3.1)

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

の自明な解として、$x(t) = 0$ がある。この解の安定性を考える。
A の Jordan 細胞の大きさを $n_1, \ldots, n_m$ $(n_1 + \ldots + n_m = n)$, 対応する固有値を $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$、固有値の実部を $\eta_1, \ldots, \eta_m$ とする。さらに A の Jordan 標準形を B とし、A を Jordan 標準形に変形する座標変換を P とする。すなわち、

$$B = P^{-1}AP$$

定理 1.5.1. $\beta \in \mathbb{R}$ は任意の $i = 1, \ldots, m$ に対して $\eta_i < \beta$ をみたすとする。このとき、ある $C > 0$ があって任意の $t \geq 0$ で

$$||e^{tA}|| \leq Ce^{bt}$$

ただし $||\cdot||$ は行列の作用素ノルム $||\cdot||_{L(\mathbb{R}^n)}$ を表す。

証明. e^{tA} の (i,j) 成分を $a_{ij}(t)$ と書くとき、

$$a_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\eta_k t} e^{\sqrt{-1}\omega_k t} \sum_{l=1}^{n_k} c_{kl} t^{l-1}$$

と表される。ここで、$\beta > \eta$ ならば、任意の $k \geq 0$ に対してある定数 C があって、任意の $t \geq 0$ で

$$t^k e^{\eta t} \leq Ce^{\beta t}$$

であるので、 ある定数 $C_{ij} > 0$ があって

$$|a_{ij}(t)| \leq C_{ij} e^{\beta t}$$

さて $M_{n,n}(\mathbb{R}^n)$ の作用素ノルムは、$\mathbb{R}^{n^2}$ の $|\cdot|_\infty$ と同値である。すなわちある $C_\infty > 0$ があって任意の $Z \in M_{n,n}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$||Z||_{L(\mathbb{R}^n)} \leq C_\infty |Z|_\infty$$

従って、

$$||e^{tA}|| \leq C_\infty |e^{tA}|_\infty = C_\infty \max |a_{ij}(t)| \leq \big(C_\infty \max C_{ij}\big) e^{\beta t}$$

□

定義 1.5.2. (1) (1.3.1) の解 $x \equiv 0$ が安定 (stable) であるとは、$t \to \infty$ で $||e^{tA}|| \to 0$ as $t \to \infty$ が成り立つことである。
(2) (1.3.1) の解 $x \equiv 0$ が準安定であるとは、ある $C > 0$ があって、任意の $t \geq 0$ で $||e^{tA}|| \leq C$ となることである。
(3) (1.3.1) の解 $x \equiv 0$ が不安定であるとは、ある初期値 $x(0)$ に対して $t \to \infty$ で $||e^{tA}x(0)|| \to \infty$ となることである。

定理 1.5.3. (1) (1.3.1) の解 $x \equiv 0$ が安定であるための必要十分条件は任意の $i = 1, \dots, m$ に対して $\eta_i < 0$ が成り立つこと。
(2) (1.3.1) の解 $x \equiv 0$ が準安定であるための必要十分条件は任意の $i = 1, \dots, m$ に対して $\eta_i < 0$ または $\eta_i = 0$ かつ $n_i = 1$ が成り立つこと。
(3) (1.3.1) の解 $x \equiv 0$ が不安定であるための必要十分条件はある $i = 1, \dots, m$ に対して $\eta_i > 0$ または $\eta_i = 0$ かつ $n_i \geq 2$ が成り立つこと。

証明. (1) 任意の $i = 1, \dots, m$ に対して $\eta_i < 0$ のときは、$\beta < 0$ を任意の $i = 1, \dots, m$ に対して $\eta_i < \beta < 0$ となるように選ぶことができる。このとき定理 1.5.1 より $t \to \infty$ で $e^{tA} \to 0$. ある i で $\eta_i \geq 0$ となるときは、固有値 α_i に属する固有ベクトルを u_i とするとき、$e^{tA}u_i = e^{\alpha_i t}u_i$ となる。ここで $||e^{tA}u_i|| = e^{\eta_i t}||u_i|| \geq ||u_i||$ より安定でない。
(2), (3) 定義より「準安定 $\Leftrightarrow$ 不安定」である。
(a) 任意の $i = 1, \dots, m$ に対して $\eta_i < 0$ または $\eta_i = 0$ かつ $n_i = 1$ とする。順番を入れ換えて $i = 1, \dots, k$ で $\eta_i < 0$, $\eta_{k+1} = \dots = \eta_m = 1$ としておく。このとき e^{tA} の (p, q)-成分 $a_{pq}(t)$ は

$$a_{pq}(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{\alpha_i t} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}^{p,q} t^{j-1} + \sum_{i=k+1}^{m} c_i^{p,q} e^{\alpha_i t}$$

とかける。任意の $i = 1, \dots, k$ に対して $\eta_i < \beta < 0$ となる β をとれば、ある $C_{pq} > 0$ で

$$|a_{pq}(t)| \leq C_{pq} e^{\beta t} + \sum_{i=k+1}^{m} |c_i^{pq}|$$

定理 1.5.1 の証明と同様の議論よりある $C > 0$ があって任意の $t \geq 0$ で $||e^{tA}|| \leq C$. 従って準安定である。
(b) ある $i = 1, \dots, m$ に対して $\eta_i > 0$ または $\eta_i = 0$ かつ $n_i \geq 2$ とする。$\eta_i > 0$ ならば固有値 α_i に属する固有ベクトルを u_i とすれば $e^{tA}u_i = e^{\alpha_i t}$ であり、$t \to \infty$ で、

$$||e^{tA}u_i|| = e^{\eta_i t}||u_i|| \to \infty$$

$\eta_i = 0$ かつ $n_i \geq 2$ ならば定理 1.3.7 よりある $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0$ があって、

$$e^{tA}\varphi_1 = e^{\alpha_i t}(\varphi_1 + t\varphi_2)$$

となる。このとき $t \to \infty$ で $||e^{tA}|| = ||\varphi_1 + t\varphi_2|| \to \infty$.
以上より不安定である。 □

§1.6 外力項のある線型常微分方程式と高階線型常微分方程式

$K = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする。
与えられた $f : \mathbb{R} \to K^n$ として、$A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ に対して

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \tag{1.6.5}$$

をみたす $x(t)$ を求めることを考える。

注意. 正確には、$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ に対して任意の $i = 1, \ldots, n$ で f_i が広義リーマン可積分とする。すなわち任意の有界閉区間 $[a, b]$ 上で f_i はリーマン可積分であると仮定する。

(1.6.5) において、$f(t)$ を外力項 (external force) あるいは非斉次項 (non homogeneous term) という。

定理 1.6.1. (1.6.5) の初期値 $x(0)$ の解は

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds \tag{1.6.6}$$

で与えられる。

証明. (1.6.5) は

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}x(t)) = e^{-tA}f(t)$$

と変形できる。これを積分すればよい。 □

$$\int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds \text{ は (1.6.5) の初期値 0 の解である。つまり}$$

$$\text{(1.6.5) の初期値 } x(0) \text{ の解} =$$
$$\left(\frac{dx}{dt} = Ax \text{ の初期値 } x(0) \text{ の解}\right) + \left(\text{(1.6.5) の初期値 0 の解}\right)$$

が成り立つ。

次に $c_0, \ldots, c_{n-1}$ を与えられた定数としたとき、

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi + c_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\varphi + \ldots + c_1\frac{d}{dt}\varphi + c_0\varphi = 0 \tag{1.6.7}$$

を満たす $\varphi : \mathbb{R} \to K$ を求めることを考える。(1.6.7) を n 階斉次定数係数常微分方程式（homogeneous constant coefficient ordinary differential equation of order n) という。

$$x_1 = \varphi, x_2 = \frac{d}{dt}\varphi, \ldots, x_n = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\varphi$$

とおいて

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とする。このとき

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{pmatrix} \tag{1.6.8}$$

とおけば (1.6.7) は

$$\frac{d}{dt}x = Ax$$

と書ける。これより (1.6.7) は初期値 $x(0) = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi^{(1)}(0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}$ （ただし $\varphi^{(i)} =$

$\dfrac{d^i}{dt^i}\varphi$）を与えれば、

$$x(t) = e^{tA}x(0)$$

と解ける。とくに e^{tA} の (i,j)-成分を $a_{ij}(t)$ とおくと

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi^{(j-1)}(0)a_{1j}(t)$$

である。

補題 1.6.2. (1) A の特性多項式を $p_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ とする。

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$$

である。
(2) A の固有値 λ に対して、固有値 λ の固有空間 $E_A(\lambda)$ の次元は 1 である。
(3) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ($i \neq j$ なら $\lambda_i \neq \lambda_j$) を A の固有値の全体とする。

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$$

とするとき、 A の *Jordan* 標準型は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_m I_{n_m} + J_{n_m} \end{pmatrix}$$

となる。
(4)
任意の $k \geq 0$ に対して、

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^{k+1}(t^k e^{\lambda t}) = 0$$

(4), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n_i$ に対して $\varphi_{ij}(t) = \dfrac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\lambda_i t}$ とおくとき、(1.6.7) の任意の解 φ は

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}\varphi_{ij}(t) \tag{1.6.9}$$

と表される。逆に、任意の $(c_{ij})_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n_i}$ に対して (1.6.9) で表される φ は (1.6.7) の解である。

定義 1.6.3. (1) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ が (1.6.7) の解の基本系 (a fundamental system of solutions) であるとは、任意の $i = 1, \ldots, n$ で φ_i が (1.6.7) の解でありかつ、(1.6.7) の任意の解 φ はある定数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に対して

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t)$$

と書けることである。
(2) $i = 1, \ldots, n$ に対して $u_i : \mathbb{R} \to K$ は n 階微分可能であるとする。$U = (u_1, \ldots, u_n)$ に対して U のロンスキー行列 (Wronski matrix) $M_U^W(t)$ を

$$M_U^W(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1^{(1)}(t) & u_2^{(1)}(t) & \cdots & u_n^{(1)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

U の ロンスキー行列式 (Wronski determinant or Wronskian) $W_U(t)$ を

$$W_U(t) = |M_U^W(t)|$$

で定義する。

命題 1.6.4. 補題 *1.6.2 - (4)* で定義した $(\varphi_{11}, \ldots, \varphi_{1n_1}, \ldots, \varphi_{m1}, \ldots, \varphi_{mn_m})$ は (1.6.7) の解の基本系である。

定理 1.6.5. $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ を (1.6.7) の解の基本系のひとつとする。このとき、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $M_\Phi^W(t)$ は正則な行列であり、

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t)$$

で与えられる解に対して、

$$M_\Phi^W(t) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

特に、初期値 $\begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi^{(1)}(0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}$ を持つ (1.6.7) の解は、

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = M_\Phi^W(0)^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi^{(1)}(0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t)$$

で与えられる。

証明. いま任意の $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ に対して

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = e^{-tA} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

とおくと、初期値が $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ である (1.6.7) の解 $\psi(t)$ に対して

$$\begin{pmatrix} \psi(t) \\ \vdots \\ \psi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

となる。ψ は (1.6.7) の解なので、ある $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ があって

$$\psi(t) = \sum_{i=1} \beta_i \varphi_i(t)$$

となる。このとき、

$$M_\Phi^W(t)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi(t)\\ \vdots\\ \psi^{(n)}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}.$$

従って $M_\Phi^W(t):K^n\to K^n$ は全射である。よって、$M_\Phi^W(t)$ は正則である。 □

例 1.6.6. 抵抗 R, コンデンサー C, コイル L を直列に繋いだ回路を考える。$R\geq 0$, $L>0$, $C>0$ として回路に流れる電流を I とすると

$$\frac{d^2}{dt^2}I+\frac{R}{L}\frac{d}{dt}I+\frac{1}{LC}I=0 \tag{1.6.10}$$

である。$J=\frac{d}{dt}I$ とおくと

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I\\ J\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I\\ J\end{pmatrix}$$

このとき特性方程式は、

$$\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0. \tag{1.6.11}$$

判別式は $\left(\frac{R}{L}\right)^2-4\frac{1}{LC}$.
(1) 判別式 >0 すなわち $CR^2>4L$ のとき：
特性方程式 (1.6.11) の解は

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-4\frac{1}{LC}}\right)\quad\text{and}\quad\lambda_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}-\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-4\frac{1}{LC}}\right)$$

とおく。($\lambda_1,\lambda_2<0$) $\Phi=(e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t})$ は (1.6.10) の解の基本系の一つである。このとき

$$M_\Phi^W(t)=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$$

であり、

$$W_\Phi(t)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}(\lambda_2-\lambda_1)$$

となる。よって初期値 $(I(0),I'(0))$ の解を $I(t)=\alpha_1 e^{\lambda_1 t}+\alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ とするとき、

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I(0)\\ I'(0)\end{pmatrix}$$

が成り立つ。ここで $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ より、(1.6.10) の解 0 は安定である。
(2) 判別式 $= 0$ すなわち $CR^2 = 4L$ のとき：
特性方程式 (1.6.11) は

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\frac{R}{L}.$$

とおくと

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$$

このとき $\Phi = (e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t})$ は (1.6.10) の解の基本系の一つである。このとき、

$$M_\Phi^W(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 te^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}$$

$$W_\Phi(t) = e^{2\lambda_1 t}$$

がなりたつ。初期値 $(I(0), I'(0))$ の解 I が

$$I(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 te^{\lambda_1 t}$$

であるとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(0) \\ I'(0) \end{pmatrix}$$

が成り立つ。$\lambda_1 < 0$ より (1.6.10) の解 0 は安定である。
(3) 判別式 < 0 すなわち $CR^2 < 4L$ のとき：

$$\eta = -\frac{1}{2}\frac{R}{L} \quad \text{and} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

とおくと、特性方程式 (1.6.11) の解は $\eta \pm \sqrt{-1}\omega$ であり $\mathbb{C}$ 値の場合は、$(e^{(\eta+\sqrt{-1}\omega)t}, e^{(\eta-\sqrt{-1}\omega)t})$ が解の基本系の一つである。実数の範囲では、

$$e^{(\eta+\sqrt{-1}\omega)t} = e^{\eta t}(\cos\omega t + \sqrt{-1}\sin\omega t)$$
$$e^{(\eta-\sqrt{-1}\omega)t} = e^{\eta t}(\cos\omega t - \sqrt{-1}\sin\omega t)$$

であるので、$\Phi = (e^{\eta t}\cos\omega t, e^{\eta t}\sin\omega t)$ は解の基本系の一つとなる。 このとき

$$M_\Phi^W(t) = \begin{pmatrix} e^{\eta t}\cos\omega t & e^{\eta t}\sin\omega t \\ \eta e^{\eta t}\cos\omega t - \omega e^{\eta t}\sin\omega t & \eta e^{\eta t}\sin\omega t + \omega e^{\eta t}\cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$W_\Phi(t) = e^{2\eta t}\omega$$

よって初期値 $(I(0), I'(0))$ の解を $I(t) = e^{\eta t}(\alpha_1 \cos\omega t + \alpha_2 \sin\omega t)$ とするとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(0) \\ I'(0) \end{pmatrix}$$

が成り立つ。$R > 0$ のとき $\eta < 0$ より (1.6.10) の解 0 は安定。$R = 0$ のときは (1.6.10) の解は周期解となり、0 は準安定である。

次に与えられた $f : \mathbb{R} \to K$ に対して、

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi + c_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\varphi + \ldots + c_1\frac{d}{dt}\varphi + c_0\varphi = f(t) \tag{1.6.12}$$

をみたす φ を求める問題を考える。(1.6.12) は f を非斉次項（あるいは外力項）とする n 階非斉次定数係数常微分方程式と呼ばれる。 線型の場合と同様に A を (1.6.8) で与えられる行列、

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$\frac{d}{dt}x = Ax + F(t)$$

となるので定理 1.6.1 より、

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s)ds$$

が成り立つ。いま e^{tA} の (i,j)-成分を $a_{ij}(t)$ とするとき、

$$\int_0^t e^{(t-s)A}F(s)ds = \int_0^t f(s) \begin{pmatrix} a_{1n}(t-s) \\ \vdots \\ a_{nn}(t-s) \end{pmatrix} ds$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} a_{1n}(t) \\ \vdots \\ a_{n-1n}(t) \\ a_{nn}(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

つまり $a_{1n}(t)$ は斉次方程式 (1.6.7) の初期値 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解である。以上より次の命題が得られる。

命題 1.6.7. (1.6.7) の初期値 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解 を $\phi(t)$ とし、

$$\varphi_*(t) = \int_0^t \phi(t-s)f(s)ds$$

とおく。φ_* は (1.6.12) の初期値 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の解であり、(1.6.12) の初期値 $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ の解 $\varphi(t)$ は (1.6.7) の初期値 $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ の解を $\psi(t)$ とするとき、

$$\varphi(t) = \psi(t) + \varphi_*(t)$$

で与えられる。

上の命題の $\varphi_*(t)$ の計算方法としては次の 2 つの方法が有る。
$\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ を (1.6.7) の解の基本系の一つとする。
(1)

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = W_\Phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t) \quad \text{であり} \quad \varphi_*(t) = \int_0^t \phi(t-s)f(s)ds.$$

(2) 常数変化法: $\varphi_*(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(t)\varphi_i(t)$ となる $\phi_i(t)$ を探す。

命題 1.6.8.

$$W^k_{\Phi,f}(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_{k-1}(t) & 0 & \varphi_{k+1}(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1^{(1)}(t) & \dots & \varphi_{k-1}^{(1)}(t) & 0 & \varphi_{k+1}^{(1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(1)}(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \dots & \varphi_{k-1}^{(n-2)}(t) & 0 & \varphi_{k+1}^{(n-2)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_{k-1}^{(n-1)}(t) & f(t) & \varphi_{k+1}^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

とし、任意の $i = 1, \dots, n$ について

$$\phi_i(t) = \int_0^t \frac{W^i_{\Phi,f}(t)}{W_\Phi(t)} dt$$

とする。このとき

$$\varphi_*(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(t)\varphi_i(t).$$

証明. $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ の定義より

$$M^W_\Phi(t) \begin{pmatrix} \phi_1'(t) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}'(t) \\ \phi_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

が成り立つ。すなわち

$$\sum_{i=1}^n \phi_i'(t)\varphi_i^{(j)}(t) = \begin{cases} 0 & (j = 0, \dots, n-2) \\ f(t) & j = n-1 \end{cases} \tag{1.6.13}$$

これを帰納的に用いると、

$$\varphi_*^{(j)}(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^n \phi_i(t)\varphi_i^{(j)}(t) & (j = 0, \dots, n-1) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \phi_i(t)\varphi_i^{(n)}(t) + f(t) & j = n \end{cases} \tag{1.6.14}$$

従って、

$$\begin{aligned} &\varphi_*^{(n)}(t) + c_{n-1}\varphi_*^{(n-1)}(t) + \dots + c_1\varphi_*^{(1)}(t) + c_0\varphi_*(t) \\ =& \sum_{i=1}^n \phi_i(t)\big(\varphi_i^{(n)}(t) + c_{n-1}\varphi_i^{(n-1)}(t) + \dots + c_1\varphi_i^{(1)}(t) + c_0\varphi_i(t)\big) + f(t) = f(t) \end{aligned}$$

よって $\varphi_*(t)$ は (1.6.12) をみたす。またその初期値は (1.6.14) より $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ である。 □

例 1.6.9. 例 1.6.6 の回路を考える。(1.6.10) に外部入力として $f(t)$ を与えると

$$\frac{d^2}{dt^2}I + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}I + \frac{1}{LC}I = f(t).$$

とくに、外部入力として交流電源を考えたときの

$$\frac{d^2}{dt^2}I + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}I + \frac{1}{LC}I = \cos\gamma t \tag{1.6.15}$$

について考える。例 1.6.6 の場合と同様に線型部分の特性方程式 (1.6.11) の判別式の正負によって 3 つの場合が有る。

(1)　判別式 > 0 すなわち $CR^2 > 4L$ のとき：

特性方程式 (1.6.11) の解は

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}}\right) \quad \text{and} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}}\right).$$

まず線型方程式 (1.6.10) の初期値 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つ解 ϕ を求める。$\phi(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、$\alpha_1 = \dfrac{-1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \alpha_2 = \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$. 従って

$$\phi(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(-e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t})$$

よって

$$\varphi_*(t) = \int_0^t \phi(t-s)\cos\gamma s ds$$

いま

$$\int_0^t e^{-\lambda s}\cos\gamma s ds = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2 + \gamma^2}(-\lambda\cos\gamma t + \gamma\sin\gamma t) + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \gamma^2}$$

より

$$\varphi_*(t) = \frac{(\lambda_1\lambda_2 - \gamma^2)\cos\gamma t - \gamma(\lambda_1+\lambda_2)\sin\gamma t}{(\lambda_1^2+\gamma^2)(\lambda_2^2+\gamma^2)} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big(\frac{-\lambda_1}{\lambda_1^2+\gamma^2}e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2+\gamma^2}e^{\lambda_2 t}\Big)$$

ここで $A = \sqrt{(\lambda_1^2+\gamma^2)(\lambda_2^2+\gamma^2)}$ とおいて、 θ を

$$\cos\theta = \frac{\lambda_1\lambda_2-\gamma^2}{A}, \sin\theta = \frac{\gamma(\lambda_1+\lambda_2)}{A}$$

をみたすように選べば、

$$\varphi_*(t) = \frac{1}{A}\cos(\gamma t+\theta) + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\Big(\frac{-\lambda_1}{\lambda_1^2+\gamma^2}e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2+\gamma^2}e^{\lambda_2 t}\Big)$$

いま任意の初期値から出発する解 $I(t)$ は

$$I(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \varphi_*(t)$$

で $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ なので、$t \to \infty$ で

$$|I(t) - \frac{1}{A}\cos(\gamma t+\theta)| \to 0$$

(2) 判別式 $=0$ すなわち $CR^2 = 4L$ のとき：
特性方程式 (1.6.11) は

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\frac{R}{L}.$$

とおく。(1.6.10) の初期値 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ の解を $\phi(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 t e^{\lambda_1 t}$ とおくとき、

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

より $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$. よって $\phi(t) = te^{\lambda_1 t}$.

$$\begin{aligned}\varphi_*(t) &= \int_0^t \phi(t-s)f(s)ds \\ &= te^{\lambda_1 t}\int_0^t e^{-\lambda_1 s}\cos\gamma s ds - e^{\lambda_1 t}\int_0^t se^{-\lambda_1 s}\cos\gamma s ds \\ &= \frac{1}{(\lambda_1^2+\gamma^2)^2}\Big((\lambda_1^2-\gamma^2)\cos\gamma t - 2\lambda\gamma\sin\gamma t\Big) + \frac{\gamma^2-\lambda_1^2+\lambda_1 t}{\lambda_1^2+\gamma^2}e^{\lambda_1 t}.\end{aligned}$$

$A = \lambda_1^2 + \gamma^2$ とおいて、$\cos\theta = \frac{\lambda_1^2 - \gamma^2}{A}, \sin\theta = 2\lambda_1\gamma A$ となる θ をとれば

$$\varphi_*(t) = \frac{1}{A}\cos(\gamma t + \theta) + \frac{\gamma^2 - \lambda_1^2 + \lambda_1 t}{\lambda_1^2 + \gamma^2} e^{\lambda_1 t}.$$

任意の解 $I(t)$ は $I(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + \varphi_*(t)$ と書ける。$\lambda_1 < 0$ より $t \to \infty$ で

$$|I(t) - \frac{1}{A}\cos(\gamma t + \theta)| \to 0.$$

(3) 判別式 < 0 すなわち $CR^2 < 4L$ のとき：

$$\eta = -\frac{1}{2}\frac{R}{L} \quad \text{and} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4}\Big(\frac{R}{L}\Big)^2}$$

とすると (1.6.10) の解の基本系の一つは $(e^{\eta t}\cos\omega t, e^{\eta t}\sin\omega t)$ である。(1.6.10) の初期値 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解を $\phi(t)$ とすると $\phi(t) = \alpha_1 e^{\eta t}\cos\omega t + \alpha_2 e^{\eta t}\sin\omega t$ であり、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \dfrac{1}{\omega}$. 従って $\phi(t) = \dfrac{e^{\eta t}}{\omega}\sin\omega t$. これより φ_* を求めると、
(a) $\eta \neq 0$ または $\omega \neq \gamma$ のときは

$$Q = (\eta^2 + (\omega - \gamma)^2)(\eta^2 + (\omega + \gamma)^2) = (\eta^2 - \omega^2 + \gamma^2)^2 + 4\eta^2\omega^2$$

とおくと

$$\varphi_*(t) = \frac{e^{\eta t}}{Q}\Big(-(\eta^2 + \omega^2 - \gamma^2)\cos\omega t + \frac{\eta}{\omega}(\eta^2 + \omega^2 + \gamma^2)\sin\omega t\Big) + \frac{(\eta^2 + \omega^2 - \gamma^2)\cos\gamma t - 2\eta\gamma\sin\gamma t}{Q}$$

とくに $\eta = 0$（$\Leftrightarrow R = 0$）ならば

$$\varphi_*(t) = \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos\gamma t - \cos\omega t)$$

(b) $\eta = 0$ かつ $\omega = \gamma$ のときは

$$\varphi_*(t) = \frac{t}{2\omega}\sin\omega t$$

補足：f が

$$\frac{d^2}{dt^2}f + a_1\frac{d}{dt}f + a_0 f = 0 \tag{1.6.16}$$

を満たすとき、

$$(c_1 - a_1)(a_0c_1 - a_1c_0) + (c_0 - a_0)^2 \neq 0 \tag{1.6.17}$$

の下では

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi + c_1\frac{d}{dt}\varphi + c_0\varphi = f(t)$$

をみたす φ の一つは

$$\alpha_1 f' + \alpha_2 f$$

の形となる。なぜなら (1.6.16) より、

$$\begin{aligned} f'' &= -a_1 f' - a_0 f \\ f''' &= (a_1^2 - a_0)f' + a_1a_0 f \end{aligned}$$

よって $\varphi = \alpha_1 f' + \alpha_2 f$ と置くとき、

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}\varphi + c_1\frac{d}{dt}\varphi + c_0\varphi \\ &= \alpha_1\Big((a_1^2 - a_0) - a_1c_1 + c_0)f' + (a_1a_0 - c_1a_0)f\Big) + \alpha_2\Big((c_1 - a_1)f' + (c_0 - a_0)f\Big) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{pmatrix} -a_1(c_1 - a_1) + c_0 - a_0 & c_1 - a_1 \\ -a_0(c_1 - a_1) & c_0 - a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.6.18}$$

なら φ は (1.6.16) をみたす。ここで
(1.6.18) の行列の行列式が 0 でない $\Leftrightarrow$ (1.6.17)